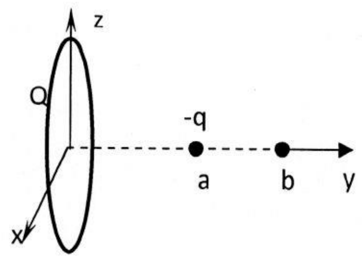
Универзитет у Крагујевцу
Природно-математички факултет
05.12.2013.године

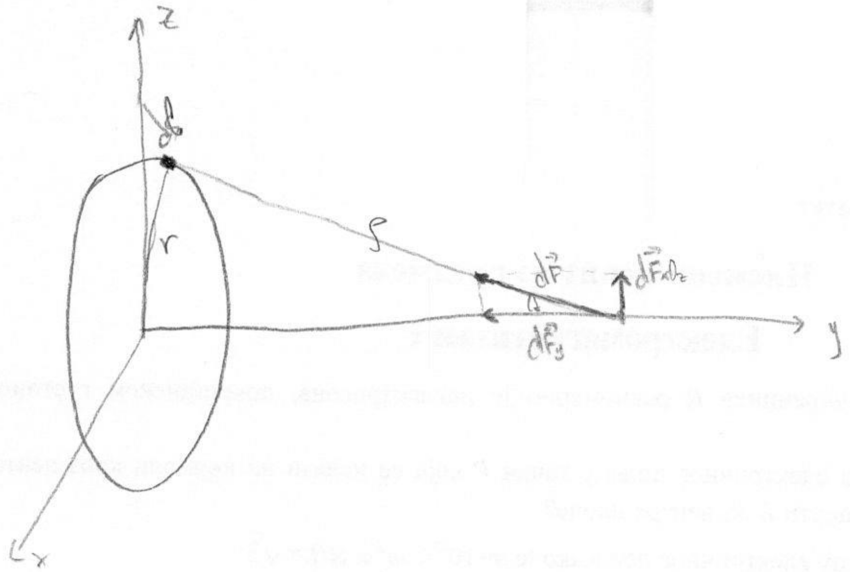
Први колоквијум из предмета
Електромагнетизам 1

1. Кружница полупречника r, равномерно наелектрисана количином наелектрисања $+Q$, лежи у xOz равни правоуглог Декартовог координатног система (центар кружнице се поклапа са координатним почетком).
   a. Којом силом делује та кружница на тачкасто наелектрисање $-q$ смештено негде на y оси?
   b. Наћи рад потребан да се наелектрисање -q премести са растојања **a** на растојање **b** дуж y осе (видети слику).



2. Равански кондензатор испуњен диелектриком електричне константе ε, дебљине d_1 има облоге површине S. Кондензатор је оптерећен до напона U, па откачен од извора напајања. Израчунати рад који је потребан да се облоге кондензатора раздвоје до дебљине d_2. При раздвајању плоча кондензатора димензије диелектрика остају непромењене а растојање од d_1 до d_2 бива испуњен ваздухом.

1.



$$\int d\vec{F}_{xOz} = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{dF_y}{dF}$$

$$\int d\vec{F}_y = \vec{F}$$

$$dF_y = dF\cos\alpha$$

$$\vec{F} = \int d\vec{F}_y$$

$$F = \frac{1}{\cancel{2}4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}\frac{q\tau}{(r^2+y^2)}\cdot 2\pi r$$

$$F = \int dF_y$$

$$F = \frac{q\tau r}{2\varepsilon_0}\frac{y}{(y^2+r^2)^{3/2}}$$

$$F = \int \cos\alpha\, dF$$

$$F = \int \cos\alpha \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dQ}{\rho^2}$$

$$\tau = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$F = \frac{qQ\cancel{r}}{4\pi\varepsilon_0\cancel{r}}\frac{y}{(y^2+r^2)^{3/2}}$$

$$dQ = \tau\, dl$$

$$F = \int \frac{\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau\, dl}{\rho^2}$$

$$F = \frac{\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{\rho^2}\underbrace{\int dl}_{2\pi r}$$

$$A = \int \vec{F}\, d\vec{s}$$

$$A = -\int_a^b F\, dy$$

$$A = -\int_a^b \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y\, dy}{(y^2+r^2)^{3/2}}$$

$$A = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{y\, dy}{(y^2+r^2)^{3/2}}$$

$$A = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{\frac{1}{2} d(y^2+r^2)}{(y^2+r^2)^{3/2}}$$

$$A = -\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0} \int_a^b (y^2+r^2)^{-\frac{3}{2}} d(y^2+r^2)$$

$$A = -\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0} \left. \frac{(y^2+r^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \right|_a^b$$

$$A = -\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0} \frac{(y^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}$$

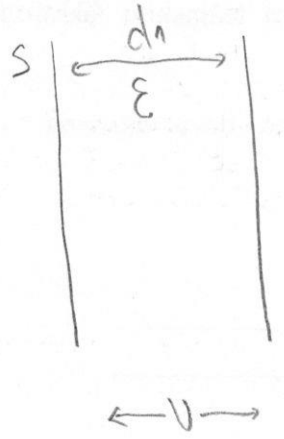
$$A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left. \frac{1}{(y^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} \right|_a^b$$

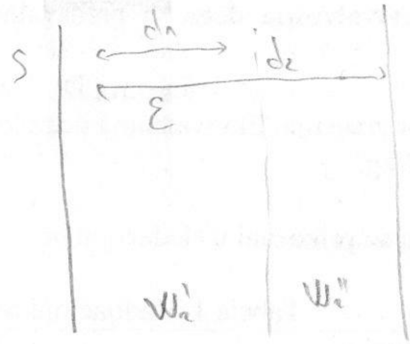
$$A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+r^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}} \right)$$

$$A = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+r^2}} \right)$$

$$A_{ab} = -A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+r^2}} \right)$$

2.





$$A = \Delta W = W_2 - W_1$$

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1} U^2$$

$$W_2 = W_2' + W_2''$$

$$W_2' = \int_{V_2'} w \, dV$$

$$W_2' = \int_{V_2'} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 \, dV$$

$$W_2' = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 \int_{V_2'} dV$$

$$W_2' = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 V_2'$$

$$W_2' = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 S \cdot d_1 \quad ; \quad E = \frac{U}{d}$$

$$W_2' = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \frac{U^2}{d_1^{\cancel{2}}} S \cancel{d_1} \quad ; \quad U = \frac{q}{C_1}$$

$$W_2' = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \frac{q^2}{d_1 C_1^2} S \quad ; \quad C_1 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d_1}$$

$$W_2' = \frac{1}{2} \cancel{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{q^2 \cancel{S}}{d_1 \frac{\varepsilon_0^2 \varepsilon^2 S^2}{d_1^2}}$$

$$W_2' = \frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon S} q^2 d_1 \qquad C_2' = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1}$$

$$W_2' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2'}$$

$$W_2' = \frac{d_1}{2\varepsilon_0\varepsilon S} q^2$$

$$W_2'' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2''}$$

$$C_2'' = \frac{\varepsilon_0 S}{(d_2 - d_1)}$$

$$W_2'' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{d_2 - d_1}}$$

$$W_2'' = \frac{d_2 - d_1}{2\varepsilon_0 S} q^2$$

$$W_2 = W_2' + W_2''$$

$$W_2 = \frac{d_1}{2\varepsilon_0\varepsilon S} q^2 + \frac{d_2 - d_1}{2\varepsilon_0 S} q^2$$

$$W_2 = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon} + d_2 - d_1\right)$$

$$W_2 = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}\left(d_2 - d_1\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$q = C_1 U = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1}\cdot U$$

$$A = \Delta W = W_2 - W_1$$

$$A = \frac{\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1}U\right)^2}{2\varepsilon_0 S}\left(d_2 - d_1\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right) - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1}U^2$$

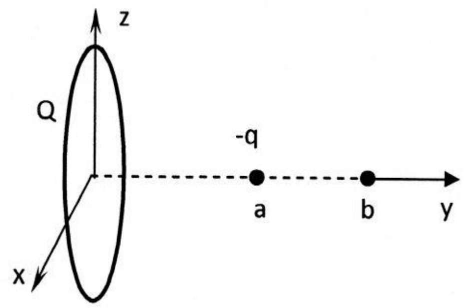
$$A = \frac{\frac{\varepsilon_0^2\varepsilon^2 S^2}{d_1^2}U^2}{2\varepsilon_0 S}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d_2}{\varepsilon} - d_1(\varepsilon - 1)\right) - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1}U^2$$

$$A = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1}U^2\left(\frac{1}{d_1}\left(\frac{d_2}{\varepsilon} - d_1(\varepsilon - 1)\right) - 1\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1}U^2\left(\frac{d_2}{\varepsilon d_1} - \varepsilon + 1 - 1\right)$$

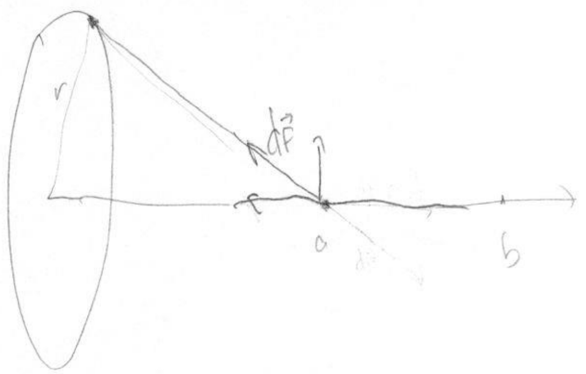
$$A = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1}U^2\left(\frac{d_2}{\varepsilon d_1} - \varepsilon\right)$$

Кружница полупречника r, равномерно наелектрисана количином нелектрисања Q, лежи у x0z равни са центром у координатном почетку. Израчунати рад који је потребан да се негативно тачкасто наектрисање (-q) премести дуж Y осе од тачке a до тачке b (b>a).



2.11

1)



$$F_1 = -\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\tau\, dl \cdot q}{\rho}\cdot \cos\alpha$$

$$F_1 = -\frac{\tau q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dl \cos\alpha}{\rho^2}$$

$$F_1 = -\frac{Qq}{2\pi r\, 4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+r^2}}\cdot\frac{1}{\rho^2}\int_0^{2\pi} r\, d\varphi$$

$$F_1 = -\frac{Qq}{\cancel{2\pi r}\, 4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}\,\frac{1}{\rho^2}\,\cancel{2\pi r}$$

$$F_1 = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y}{\sqrt{y^2+r^2}}\,\frac{1}{x^2+r^2}$$

$$F_1 = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y}{(y^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\tau = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$dl = r\, d\varphi$$

$$A = \int_a^b \vec{F}_1 \cdot d\vec{y}$$

$$A = -\int_a^b -F_1\, dy$$

$$A = -\int_b^a \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y\, dy}{(y^2+r^2)^{3/2}}$$

$$A = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{d(y^2+r^2)}{2\,(y^2+r^2)^{3/2}}$$

$$A = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\,\frac{(y^2+r^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\Bigg|_b^a$$

$$A = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{y^2+r^2}}\Bigg|_b^a (-1)$$

$$A = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+r^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)$$

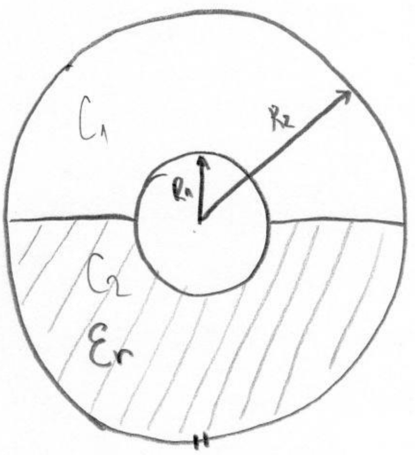
$$A = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+r^2}}\right)$$

Сферни кондензатор полупречника електрода R_1 и R_2, испуњен је до половине уљем непознате релативне диелектричне пропустљивости. Напон између електрода кондензатора је U. Кроз мали отвор на дну кондензатора испусти се уље. Када уље истекне напон између електрода се повећа 1,75 пута.

а) Одредити ε_r уља које се налазило у кондензатору

б) Одредити површинску густину наелектрисања на унутрашњој електроди пре истицања уља (σ_1 и σ_2)

Решение:



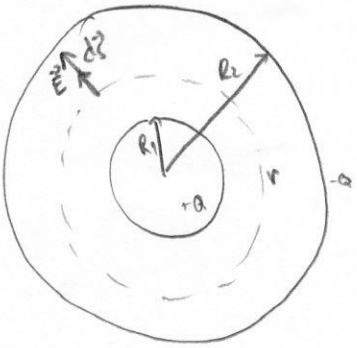
$$C = C_1 + C_2$$

$$C_1 = \frac{1}{2} C_{\text{воздух}}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} C_{\text{уље}}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$



$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = Q$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} \parallel d\vec{S}$$

$$\varepsilon_0 E \, 4\pi r^2 = Q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\, d\vec{r}$$

$$\vec{E} \parallel d\vec{r}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$$

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

$$C = \frac{1}{2}(1+\varepsilon_r)\,4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$$

Након испуштања уља добија се сферни кондензатор са ваздушним диелектриком капацитивности:

$$C' = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$$

Како је $q = const$

$$q = q'$$

$$q = CU \qquad q' = C'U'$$

$$CU = C'U'$$

$$C\cancel{U} = C'\,1{,}75\cancel{U}$$

$$\frac{1}{2}(1+\varepsilon_r)\cancel{4\pi\varepsilon_0}\cancel{\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}} = 1{,}75\,\cancel{4\pi\varepsilon_0}\cancel{\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}}$$

$$1+\varepsilon_r = 3{,}5$$

$$\varepsilon_r = 2{,}5$$

б) Јачина електричног поља у делу са диелектриком и ваздуком је иста

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 E$$

$$\sigma_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

$$\sigma_2 = \varepsilon_r \sigma_1$$

Укупна количина наелектрисања износи:

$$q = \sigma_1 \frac{S}{2} + \sigma_2 \frac{S}{2}$$

$$q = \sigma_1 \frac{4\pi R_1^2}{2} + \varepsilon_r \sigma_1 \frac{4\pi R_1^2}{2}$$

$$q = 2\pi R_1^2 \sigma_1 (1 + \varepsilon_r)$$

$$q = CU$$

$$CU = 2\pi R_1^2 \sigma_1 (1 + \varepsilon_r)$$

$$\sigma_1 = \frac{CU}{2\pi R_1^2 (1+\varepsilon_r)}$$

$$C = \frac{1}{2}(1+\varepsilon_r)\, 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

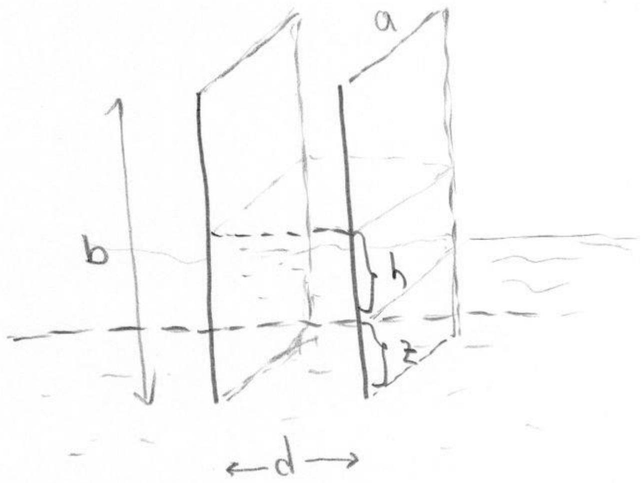
$$\sigma_1 = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{(1+\varepsilon_r)}\cancel{4\pi}\varepsilon_0 \frac{\cancel{R_1} R_2}{R_2 - R_1} U}{\cancel{2\pi} R_1^{\cancel{2}} \cancel{(1+\varepsilon_r)}}$$

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0 R_2 U}{R_1 (R_2 - R_1)}$$

$$\sigma_2 = \varepsilon_r \sigma_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r R_2 U}{R_1 (R_2 - R_1)}$$

У широки суд са течношћу постављен је вертикално равни кондензатор, тако да је доњи део плоча потопљен у течност. Кондензатор је укључен на извор који између плоча кондензатора одржава сталну потенцијалну разлику U. Растојање између плоча кондензатора је d, густина течности ρ, а релативна диелектрична пропустљивост ε_r. Течност је нестишљива. На коју висину ће се подићи ниво течности између плоча кондензатора? Површински напон занемарити.

Решење:



$$\delta A = \vec{F}\, d\vec{z}$$

$$\delta A = dW$$

$$\int_0^h F\,dz = \int_{W_1}^{W_2} dW$$ – у случају када $F \neq F(z)$

$$F \cdot h = W_2 - W_1$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{a\cdot z}{d} U^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{a(b-z)}{d} U^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{a(z+h)}{d} U^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{a(b-z-h)}{d} U^2$$

$$A = F \cdot h$$

$$A = W_2 - W_1$$

$$A = \cancel{\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{az}{d} U^2} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{ah}{d} U^2 + \cancel{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{a(b-z)}{d} U^2} - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{ah}{d} U^2$$

$$- \left(\cancel{\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{az}{d} U^2} + \cancel{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{a(b-z)}{d} U^2} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \varepsilon_0 h \frac{a}{d} U^2 (\varepsilon_r - 1)$$

$$A = F \cdot h$$

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{a}{d} U^2 (\varepsilon_r - 1)$$

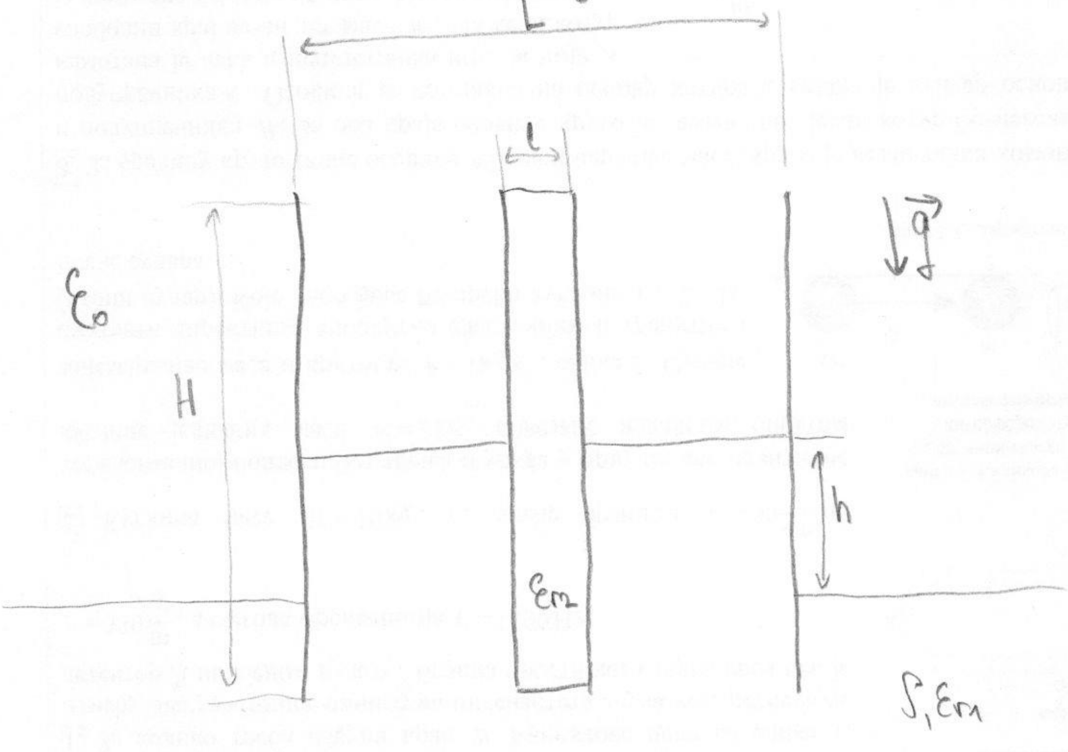
$$F = mg = \rho V g$$

$$F = \rho\, a \cdot d \cdot h \cdot g$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \cancel{h} \frac{a}{d} U^2 (\varepsilon_r - 1) = \rho a d h g \cdot \cancel{h}$$

$$h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2} \frac{\varepsilon_r - 1}{\rho g}$$

Диелектрична плоча ширине l и произвољне релативне диелектричне пропустљивости ε_{r2} постављена је између електрода плочастог кондензатора чије је растојање између електрода L. Плоче кондензатора су квадратног облика странице H. Кондензатор је делимично потопљен у течност густине ρ и релативне диелектричне пропустљивости ε_{r1}. Одредити висину h за коју се течност између електрода кондензатора попне пошто се плоче наелектришу количином наелектрисања Q.



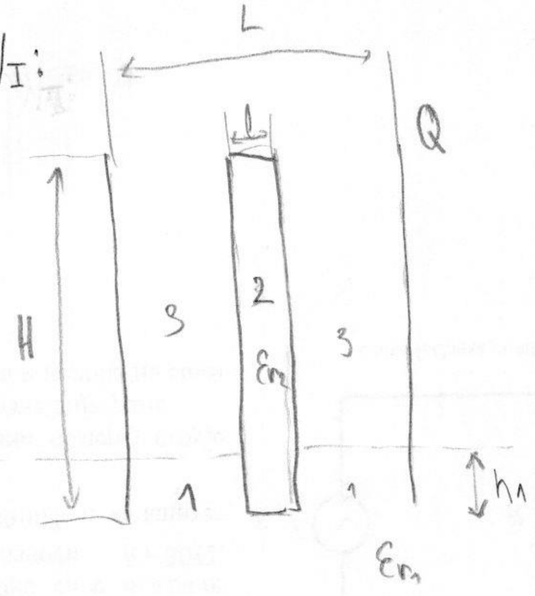
$Q = \text{const}$

$$\Delta W = A = F \cdot h$$

$$\Delta W = F \cdot h$$

$$\Delta W = W_{II} - W_{I}$$

W_I:



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$W_I = W_1 + W_2 + W_3$$

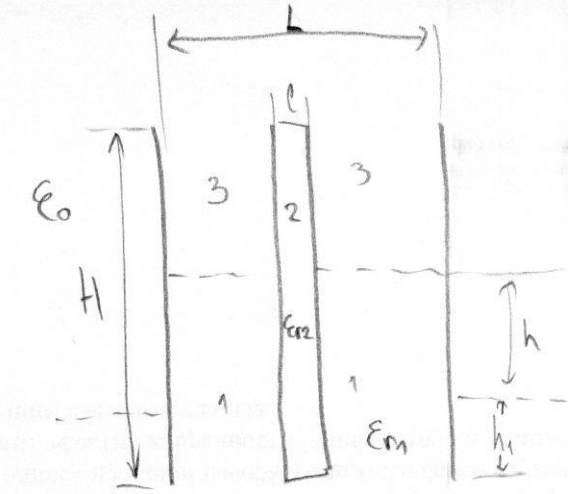
$$W_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1^2 V_1 \qquad V_1 = H \cdot h_1 \cdot (L - l) \qquad E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}}$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2^2 V_2 \qquad V_2 = H \cdot H \cdot l \qquad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}$$

$$W_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_3^2 V_3 \qquad V_3 = H \cdot (H - h_1)(L - l) \qquad E_3 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$W_I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1^2 V_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2^2 V_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_3^2 V_3$$

W_{II}:



$$W_{II} = W_1' + W_2' + W_3'$$

$$W_1' = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1^2V_1' \qquad V_1' = H\cdot(h_1+h)(L-l) \qquad E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}$$

$$W_2' = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_2^2V_2' \qquad V_2' = H\cdot H\cdot l \qquad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$$

$$W_3' = \frac{1}{2}\varepsilon_0E_3^2V_3' \qquad V_3' = H(H-h_1-h)\cdot(L-l) \qquad E_3 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$W_{II} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1^2V_1' + \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_2^2V_2' + \frac{1}{2}\varepsilon_0E_3^2V_3'$$

$$\Delta W = W_{II} - W_I$$

$$\Delta W = W_1' + W_2' + W_3' - W_1 - W_2 - W_3$$

$$\Delta W = W_1' - W_1 + W_2' - W_2 + W_3' - W_3$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1^2(V_1'-V_1) + \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_2^2(V_2'-V_2) + \frac{1}{2}\varepsilon_0E_3^2(V_3'-V_3)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1^2\,\Delta V_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_2^2\,\Delta V_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0E_3^2\,\Delta V_3$$

$$\Delta V_1 = V_1' - V_1 = H(h_1+h)(L-l) - H\cdot h_1(L-l) = H\cdot h(L-l)$$

$$\Delta V_2 = V_2' - V_2 = H^2 l - H^2 l = 0$$

$$\Delta V_3 = H(H-h_1-h)(L-l) - H(H-h_1)(L-l) = -Hh(L-l)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1^2\, H\cdot h(L-l) - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_3^2 Hh(L-l)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 Hh(L-l)\left[\varepsilon_{r1}E_1^2 - E_3^2\right]$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 Hh(L-l)\left[\cancel{\varepsilon_{r1}}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2\varepsilon_{r1}^{\cancel{2}}} - \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}\right]$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0}Hh(L-l)\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^{\cancel{2}}}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} - 1\right)$$

$$\sigma = \frac{Q}{H^2}$$

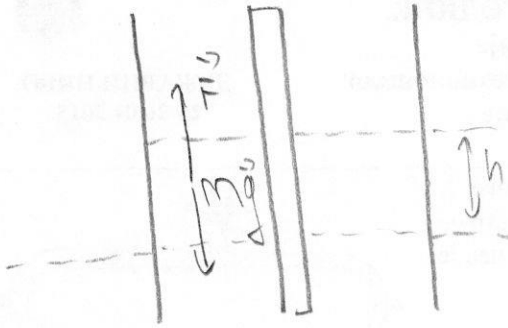
$$\Delta W = \frac{1}{2}\cancel{H}h(L-l)\frac{Q^2}{H^{\cancel{4}3}\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} - 1\right)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\frac{Q^2 h(L-l)}{H^3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} - 1\right)$$

$$\Delta W = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{Q^2(L-l)}{H^3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} - 1\right)}_{F}\cdot h$$

$$\Delta W = A = F\cdot h$$

$$F = \frac{1}{2}\frac{Q^2(L-l)}{H^3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} - 1\right)$$



$$|\vec{F}| = |m\vec{g}|$$

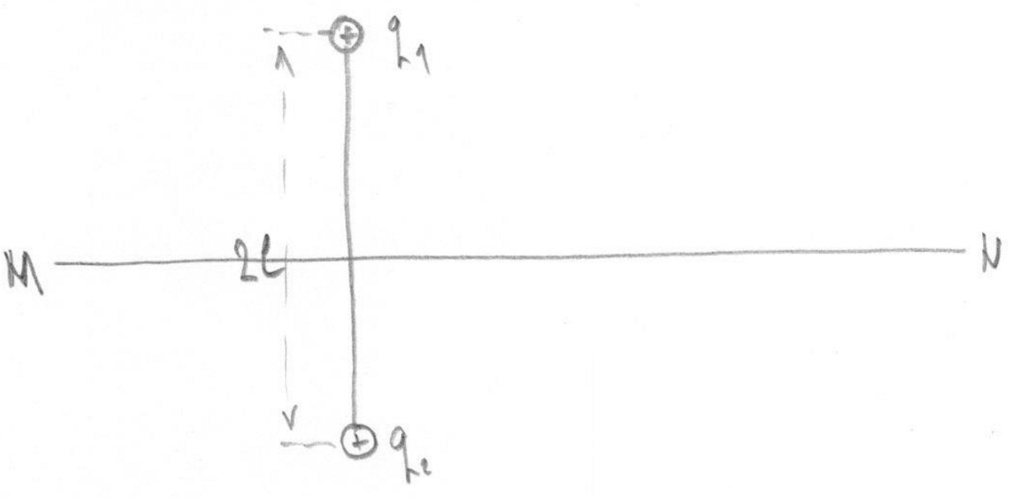
$$\frac{1}{2}\,\frac{Q^2(L-c)}{H^3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}}-1\right) = mg$$

$$m = \rho\cdot V = \rho\cdot H\cdot h\cdot(L-c)$$

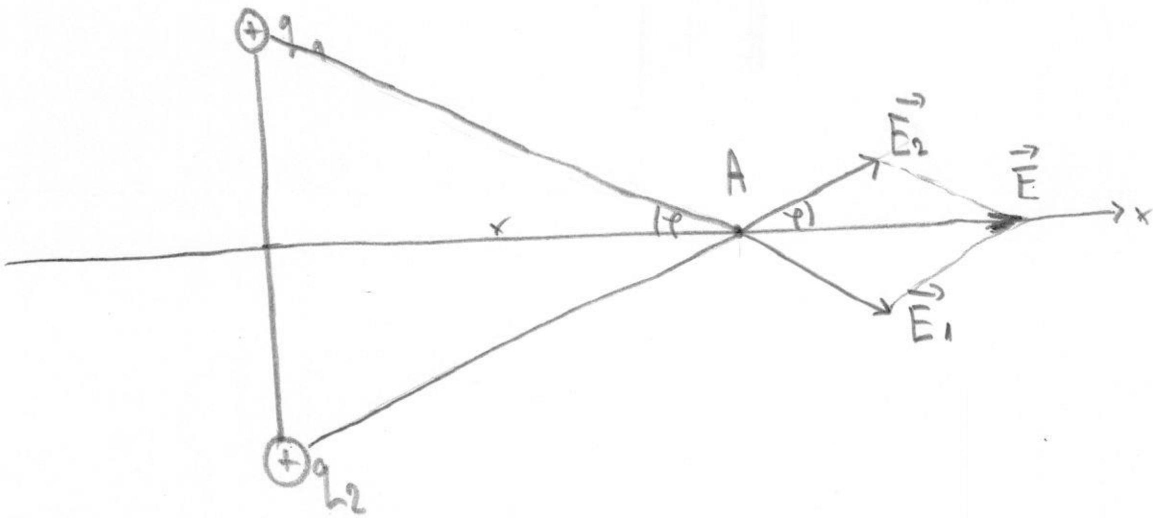
$$\rho H\cdot h\,\cancel{(L-c)} = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2\,\cancel{(L-c)}}{H^3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}}-1\right)$$

$$h = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{\rho\varepsilon_0 H^4}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}}-1\right)$$

Два једнака позитивна тачкаста наелектрисања $q_1 = q_2 = q$ налазе се на растојању $2l = 10$ cm једно од другог. Наћи на правој MN, која је оса симетрије тих наелектрисања, тачку у којој интензитет електричног поља има максимум.



Решење:



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_1^3} \vec{r}_1$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_2^3} \vec{r}_2$$

$$q_1 = q_2$$

$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r$$

$$E_1 = E_2$$

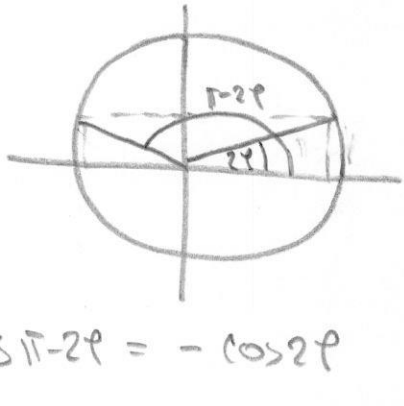
На основу косинусне теореме:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos\measuredangle(\vec{E}_1, E_2)$$

$$\measuredangle(\vec{E}_1, \vec{E}_2) = \pi - 2\varphi$$

$$E_1 = E_2$$

$$E^2 = 2E_1^2 - 2E_1^2 \cdot \cos(\pi - 2\varphi)$$



$$\cos \pi - 2\varphi = -\cos 2\varphi$$

$$E^2 = 2E_1^2 (1 + \cos 2\varphi)$$

$$E^2 = 4E_1^2 \underbrace{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}}_{\cos^2 \varphi}$$

$$E^2 = 4E_1^2 \cos^2 \varphi$$

$$E = 2E_1 \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{x^2 + l^2}$$

$$E = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{x^2 + l^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}$$

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow E_{max}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{(x^2 + l^2)^{3/2}}\right] = 0$$

$$\frac{(x^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} - x \frac{3}{\cancel{2}} (x^2 + l^2)^{\frac{3}{2} - 1} \cdot \cancel{2}x}{(x^2 + l^2)^{3/2}} = 0$$

$$(x^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2 (x^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\underbrace{(x^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}_{r \neq 0} (x^2 + l^2 - 3x^2) = 0$$

$$l^2 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = l^2$$

$$x_{1,2} = \pm l \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_{1,2} \approx \pm 3{,}5 \text{ cm}$$