

Prirodno-matematički fakultet  
Univerzitet u Kragujevcu

Ivan M. Živić  
Vukota M. Babović  
Sava S. Milojević

**MAGNETSKO POLJE**  
**ZBIRKA REŠENIH I KOMENTARISANIH ZADATAKA**

Kragujevac, 1993. godine



**Prirodno-matematički fakultet  
Univerzitet u Kragujevcu**

**Ivan M. Živić  
Vukota M. Babović  
Sava S. Milojević**

**MAGNETSKO POLJE**  
**ZBIRKA REŠENIH I KOMENTARISANIH ZADATAKA**

**Kragujevac, 1993. godine**

Recenzenti:

dr Nataša Nedeljković

dr Ljubiša Nedeljković

---

Odlukom nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Kragujevcu, broj 270/IV-11 od 13.10.1993. odobreno da se štampa kao priručnik za studente fizike na Prirodno-matematičkom fakultetu.

---

## SADRŽAJ

Glava Uvodna.	
<b>Pregled osnovnih formula</b> . . . . .	1
Glava Prva.	
<b>Magnetsko polje struja u vakuumu. Osnovne konfiguracije</b> . . . . .	11
Glava Druga.	
<b>Magnetsko polje struja u vakuumu. Magnetske sile</b> . . . . .	33
Glava Treća.	
<b>Magnetsko polje struja u vakuumu. Složeniji primeri</b> . . . . .	55
Glava Četvrta.	
<b>Elektromagnetska indukcija</b> . . . . .	73
Glava Peta.	
<b>Energija magnetskog polja</b> . . . . .	97
Glava Šesta.	
<b>Magnetici</b> . . . . .	121
Glava Sedma.	
<b>Maksvelova teorija</b> . . . . .	143
<b>Fizičke konstante</b> . . . . .	159
<b>Literatura</b> . . . . .	161

## PREDGOVOR

Ovo je drugi deo Zbirke zadataka u okviru kursa elektromagnetizma za studente fizike na Prirodno-matematičkom fakultetu kragujevačkog Univerziteta. Prvi deo, pod nazivom *Električno polje* pojavio se pre izvesnog vremena kao interna publikacija Instituta za fiziku.

Zadaci su pre svega namenjeni studentima druge godine fizike, kao pomoć pri izučavanju elektromagnetskih fenomena. Zbog toga su uključeni mnogi zadaci koji se, kao tipični, ne smeju izostaviti jer bi bio povredjen obrazovni cilj kursa. Izvestan broj zadataka, međutim, imaju nestandardni karakter i studenti ih mogu savladati jedino uz povišeni interes i produbljeni pristup; takvi zadaci stoje kao izazov pojedincima koji sebe vide u takvoj ulozi. Naše iskustvo govori da u svakoj generaciji ima mladih ljudi sposobnih za natprosečno usvajanje znanja i njima treba dati šansu i u ovakvim zbirkama.

Mislimo da je rešavanje svakog zadatka svojevrsan kreativan čin. U tom svetlu, kao što je u metodici već primećeno, za talentovane učenike je formalni kraj zadatka tek pravi početak za dublje osvetljavanje načetog problema. Zato smo uveli *Pitanja i komentare* kao podsticaj u tom pravcu, nudeći ideje za generalizacije, asocijacije, raščišćavanje dilema i sl. Tu će se često naći i opaske koje omogućavaju potpunije korišćenje udžbenika. U tom je smislu ova Zbirka nešto više od puke ilustracije formula magnetizma.

Zadaci su rešeni. Numerici je posvećena dužna pažnja mada, razumljivo, u sažetijoj formi nego u prvoj knjizi o električnom polju. Kod nas nisu česte zbirke rešenih zadataka iz ove oblasti opšte fizike. Smatramo da se veština rešavanja zadataka može učiti na primerima.

U Kragujevcu, proleće 1993.

Autori

## GLAVA UVODNA

## PREGLED OSNOVNIH FORMULA

**1.** Sila koja deluje na strujni element  $id\vec{\ell}$  jednaka je

$$d\vec{F} = id\vec{\ell} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Vektor  $\vec{B}$ , koji je osnovna karakteristika magnetskog polja, zove se *magnetska indukcija*. Relacija (1) je definiciona za magnetsku indukciju. (§76)\*

**2.** Na pravolinijski deo provodnika dužine  $\ell$  deluje sila

$$\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}. \quad (2)$$

Izraz važi ako je ceo provodnik u homogenom magnetskom polju indukcije  $\vec{B}$ . (§76)

**3.** Ako postoji nekoliko strujnih kontura koje daju u nekoj tački, redom, magnetske indukcije  $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots$  onda je magnetska indukcija rezultujućeg polja jednaka vektorskom zbiru indukcija pojedinih kontura:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots = \sum_k \vec{B}_k. \quad (3)$$

Ovaj stav, koji ima uporište u eksperimentu i iskustvu uopšte, naziva se *princip superpozicije*. (§76)

**4.** Opit pokazuje da se oko strujnog elementa  $id\vec{\ell}$  formira magnetsko polje indukcije

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (4)$$

---

\* Na kraju svakog odeljka u ovom uvodu, gde se prikazuje neka od formula magnetizma, u zagradi se navodi i broj paragrafa, mesto u udžbeniku gde se o tome govori detaljno; radi se o knjizi: *S. G. Kalašnjikov, Elektricitet, "Nauka", Moskva 1977 (prevod na srpski Dr V. M. Babović, interno izdanje Prirodno-matematičkog fakulteta u Kragujevcu)*.

Ovde je  $\vec{r}$  radijus vektor koji povezuje strujni element i posmatranu tačku u kojoj se određuje indukcija, a  $\mu_0$  je magnetska konstanta. Formula nosi naziv *Bio-Savar-Laplasov zakon*. (§76)

**5.** Dva paralelna strujna elementa se privlače (a odbijaju se ako su antiparalelna) silom kojoj je intenzitet određen izrazom

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_1 d\ell_1 i_2 d\ell_2}{r_{12}^2}. \quad (5)$$

Ovde je  $r_{12}$  rastojanje između strujnih elemenata. (§76)

**6.** Teoremom o magnetskom naponu izražava se jedno važno svojstvo magnetskog polja sadržano u ovom kratkom matematičkom iskazu

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i. \quad (6)$$

Relacija važi za proizvoljno, vremenski konstantno polje koje je izazvano proizvoljnom raspodelom struja u prostoru. Ukratko, magnetski napon duž zatvorene konture jednak je ukupnoj jačini struje koja protiče kroz površinu ograničenu posmatranom konturom. Vrlo često se ova teorema u literaturi naziva i teorema o *cirkulaciji* vektora  $\vec{H}$ . (§81)

**7.** Magnetska indukcija u torusnom namotaju izračunava se iz obrasca

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}. \quad (7)$$

Ovde je  $N$  broj navoja torusa,  $i$  je jačina struje kroz namotaj, a  $r$  poluprečnik zamišljene kružnice kojoj pripada posmatrana tačka u torusu. (§81)

**8.** Magnetska indukcija u centru dugog solenoida izračunava se iz obrasca

$$B = \mu_0 n i. \quad (8)$$

Ovde je  $n$  broj navoja po jedinici dužine solenoida (linijska gustina navoja), a  $i$  je jačina struje kroz solenoid. (§81)

**9.** Magnetski moment strujne konture definiše se relacijom

$$\vec{p}_m = i S \vec{n}. \quad (9)$$

Ovde je  $i$  jačina struje,  $S$  je površina ograničena strujnom konturom a  $\vec{n}$  jedinični vektor normale na površinu. Smer normale u skladu je sa smerom struje (pravilo desnog zavrtnja). (§82)



**10.** Magnetski fluks se definiše relacijom

$$\Phi = \int_S B_n dS. \quad (10)$$

Normalna komponenta indukcije za datu elementarnu površinu  $dS$  označena je sa  $B_n$ . Površinski integral se proteže na celu posmatranu površinu  $S$ . (§84)

**11.** Mehanički rad u magnetskom polju može se izračunavati polazeći od relacije

$$\delta A = i d\Phi. \quad (11)$$

Ovde je  $\delta A$  rad sila polja, a  $d\Phi$  priraštaj magnetskog fluksa kroz površinu ograničenu konturom kojom teče struja jačine  $i$ . (§84)

**12.** Kada se ravna strujna kontura nadje u homogenom magnetskom polju, na nju deluje moment sile

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (12)$$

Ovde je  $\vec{p}_m$  magnetski moment strujne konture, a  $\vec{B}$  magnetska indukcija. (§85)

**13.** Na elementarnu strujnu konturu, proizvoljno orijentisanu u prostoru, deluje mehanička sila

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \nabla) \vec{B}, \quad (13a)$$

u nehomogenom magnetskom polju indukcije  $\vec{B}$ . Ako je  $\vec{p}_m$  usmeren u celosti duž određene ose, recimo ose  $x$ , a indukcija zavisi jedino od koordinate  $x$ , izraz za silu se redukuje na

$$F = p_m \frac{dB}{dx}. \quad (13b)$$

Gradijent magnetskog polja određuje veličinu i smer magnetske sile. (§85)

**14.** Oko pokretnog naelektrisanja  $q$  formira se magnetsko polje indukcije

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}. \quad (14)$$

Naelektrisanje se kreće konstantnom brzinom  $\vec{v}$ . U datom momentu, kada određujemo vrednost indukcije,  $\vec{r}$  je radijus-vektor povučen od naelektrisanja do posmatrane tačke. Magnetsko delovanje pokretnog naelektrisanja

zavisi od ekvivalentnog strujnog elementa  $i\vec{\ell} = q\vec{v}$ . Formula (14) ne važi za proizvoljno velike brzine već jedino za brzine znatno manje od brzine svetlosti. Inače, može se smatrati da je formula nastala uopštavanjem eksperimentalnih fakata pri nerelativističkim brzinama. (§86)

**15.** Na pokretno opterećenje  $q$  u magnetskom polju deluje Lorencova sila

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (15a)$$

Čestica se kreće brzinom  $\vec{v}$  u magnetskom polju indukcije  $\vec{B}$ . Ako postoji još i električno polje  $\vec{E}$ , ukupna sila je jednaka

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (15b)$$

I ovaj izraz za elektromagnetsku silu na pokretno opterećenje se naziva *Lorencova sila*. Izraz je univerzalan. Važi i za vremenski promenljiva polja, pri proizvoljnim brzinama. Na nepokretno opterećenje magnetsko polje ne može da deluje. (§88)

**16.** Osnovni zakon elektromagnetske indukcije, u Maksvelovoj formulaciji, izražava se formulom

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (16)$$

Indukovana elektromotorna sila duž date konture proporcionalna je brzini promene magnetskog fluksa kroz površinu koja se naslanja na konturu. Znak minus u formuli je u skladu sa Lencovim pravilom. Zakon je na snazi kada se magnetski fluks kroz konturu menja zbog kretanja konture, ili zbog promene magnetskog polja u vremenu, ili ako se događa i jedno i drugo istovremeno. (§91)

**17.** Ako je  $i$  jačina struje u datoj konturi, onda je fluks kroz konturu

$$\Phi = Li. \quad (17)$$

Koeficijent proporcionalnosti  $L$  naziva se koeficijent samoindukcije ili prosto *induktivnost konture*. (§93)

**18.** Elektromotorna sila samoindukcije data je formulom

$$\mathcal{E} = -L \frac{di(t)}{dt}, \quad (18)$$

koja važi za nedeformabilnu konturu. Elektromotorna sila samoindukcije proporcionalna je brzini promene struje. (§93)

**19.** Uspostavljanje struje u  $r, L$  kolu odvija se po zakonu

$$i = I \left( 1 - e^{-t/T} \right), \quad (19)$$

gde je  $I$  asimptotska vrednost struje data količnikom elektromotorne sile u kolu i ukupne omske otpornosti kola ( $\mathcal{E}/r$ ), a  $T = L/r$ , vremenska konstanta kola (količnik induktivnosti kola i omske otpornosti). (§95)

**20.** Isčezavanje struje u  $r, L$  kolu odvija se po zakonu

$$i = I_0 e^{-t/T}. \quad (20)$$

Početna vrednost struje u kolu je bila  $I_0$ , a vremenska konstanta  $T$  ima isti smisao kao i u formuli za uspostavljanje struje, jednačina (19). (§95)

**21.** Električna struja jačine  $i$  u konturi induktivnosti  $L$  formira magnetsko polje čija je energija

$$W = \frac{1}{2} L i^2. \quad (21)$$

Često se ova energija naziva *sopstvena energija struje*. (§96)

**22.** Gustina energije magnetskog polja, u tački gde je jačina magnetskog polja  $H$ , data je izrazom

$$u = \frac{1}{2} \mu_0 H^2. \quad (22a)$$

U linearnoj sredini koju karakteriše magnetska permeabilnost  $\mu$ , desnu stranu jednačine treba još pomnožiti tom veličinom. Energija magnetskog polja sadržana u zapremini  $\tau$  iznosi

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\tau} \mu H^2 d\tau. \quad (22b)$$

Energija je lokalizovana u magnetskom polju. (§97)

**23.** Posmatrajmo dve strujne konture koje su magnetski spregnute. Prva kontura stvara kroz drugu magnetski fluks

$$\Phi_{12} = L_{12} i_1, \quad (23a)$$

a druga kroz prvu, na sličan način

$$\Phi_{21} = L_{21} i_2. \quad (23b)$$

Veličine  $i_1$  i  $i_2$  su jačine struja u prvoj i drugoj konturi, respektivno, a  $L_{12}$  i  $L_{21}$  su *koeficijenti uzajamne indukcije*. U odsustvu feromagnetskih materijala važi

$$L_{12} = L_{21} . \quad (23c)$$

Ovo zanimljivo i važno svojstvo naziva se *teoremom uzajamnosti*. (§98)

**24.** Ako su date dve strujne konture s jačinama struja  $i_1$  i  $i_2$  i ako medju njima postoji magnetska veza okarakterisana koeficijentom uzajamne indukcije  $L_{12}$ , tada je

$$W_{12} = L_{12}i_1i_2 . \quad (24)$$

Ovaj se član naziva energija uzajamnog dejstva dve struje. U zavisnosti od smerova struja, on može biti kako pozitivan, tako i negativan. (§99)

**25.** Zakon održanja energije u prisustvu magnetskog polja može se zapisati u vidu

$$\sum_k \mathcal{E}_k i_k dt = \sum_k r_k i_k^2 dt + \delta A + d \left( \sum_k \sum_\ell \frac{1}{2} L_{k\ell} i_k i_\ell \right) . \quad (25)$$

Sumira se po broju nepokretnih (ili pokretnih) strujnih kontura. Relacija ustanovljava da rad strujnih izvora odlazi na Džulovu toplotu, mehanički rad u sistemu i promenu energije magnetskog polja. (§100)

**26.** Pri sporoj, proizvoljnoj deformaciji strujne konture dobija se iz zakona održanja energije

$$\Delta A = \Delta \left( \frac{1}{2} L i^2 \right)_{i=const} . \quad (26)$$

Mehanički rad ponderomotornih sila jednak je promeni energije magnetskog polja, pri konstantnoj vrednosti jačine struje. (§101)

**27.** Vektor magnećenja supstancije  $\vec{I}$  (magnetizacija) definiše se na sledeći način:

$$\vec{I} = \sum \frac{\vec{p}_m}{\tau} . \quad (27)$$

Magnetski momenti molekularnih struja označeni su sa  $\vec{p}_m$ . Sumiranje se vrši po svim molekulima u zapremini  $\tau$ , koja je fizički mala. Vektor magnećenja je dakle magnetski momenat jedinične zapremine supstancije i osnovna veličina koja karakteriše magnetsko stanje supstancije. (§103)

**28.** Pri homogenom magnećenju, magnećenje  $I$ , odnosno moduo vektora magnećenja  $\vec{I}$ , jednako je linijskoj gustini površinske struje magnetika

$$I = j_1 . \quad (28)$$

Detaljnije o ovome videti u udžbeniku. (§103)

**29.** Po definiciji, magnetska indukcija u magnetiku jednaka je zapreminski usrednjenom vrednosti mikroskopske magnetske indukcije:

$$\vec{B} = \langle \vec{B}_M \rangle . \quad (29)$$

Detaljnije videti u udžbeniku. (§105)

**30.** Pod jačinom magnetskog polja u magnetiku podrazumevamo vektor  $\vec{H}$  koji je definisan na sledeći način:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} . \quad (30)$$

Vektor  $\vec{H}$  je kombinacija dva člana,  $\vec{B}/\mu_0$  i  $\vec{I}$ , koji imaju svoju jasnu fizičku osobenost. Prema tome,  $\vec{H}$  je pomoćni vektor, kojem se teško može pripisati samostalni dublji fizički smisao. (§105)

**31.** U izotropnim, linearnim magneticima, shodno onom što sledi iz eksperimenta i iskustva uopšte, važi relacija

$$\vec{I} = \kappa \vec{H} , \quad (31)$$

gde je  $\kappa$  magnetska susceptibilnost supstancije. (§105)

**32.** U izotropnom i linearnom magnetiku vektori magnetske indukcije i jačine magnetskog polja su u linearnoj vezi

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} . \quad (32)$$

Ovde je  $\mu$  (relativna) magnetska permeabilnost supstancije. (§105)

**33.** Magnetska permeabilnost supstancija koje spadaju u paramagnetike ili dijamagnetike određena je relacijom

$$\mu = 1 + \kappa , \quad (33)$$

gde je  $\kappa$  magnetska susceptibilnost posmatrane sredine. (§105)

**34.** Granični uslovi za vektore  $\vec{B}$  i  $\vec{H}$  na razdvojnoj površini između magnetika permeabilnosti  $\mu_1$  i magnetika permeabilnosti  $\mu_2$  glase:

$$B_{n1} = B_{n2} , \quad (34a)$$

$$H_{t1} = H_{t2} . \quad (34b)$$

Normalna komponenta vektora magnetske indukcije neprekidna je. Tangencijalna komponenta vektora jačine magnetskog polja neprekidna je. (§108)

**35.** Zakon prelamanja linija vektora magnetske indukcije određen je izrazom

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} . \quad (35)$$

Linije indukcije, ulazeći u sredinu veće permeabilnosti, udaljavaju se od normale i samim tim se zgušnjavaju. (§108)

**36.** Klasičan tretman kretanja elektrona po kružnoj (ili eliptičnoj) putanji u atomu daje za žiromagnetski odnos

$$\Gamma = -\frac{1}{2} \frac{e}{m} . \quad (36)$$

Žiromagnetski odnos je količnik orbitalnog magnetskog momenta i mehaničkog momenta (momenta količine kretanja). (§115)

**37.** Larmorova teorema govori o uticaju magnetskog polja na orbitalni elektron. Larmorova ugaona brzina precesije iznosi

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{eB}{m} . \quad (37)$$

Dejstvo magnetskog polja na pokretni elektron svodi se na superpoziciju tog kretanja i ravnomerne rotacije orbitalnog (magnetskog) momenta ugaonom brzinom  $\Omega$  oko pravca spoljašnjeg magnetskog polja. (§115)

**38.** Sopstveni žiromagnetski odnos elektrona iznosi

$$\Gamma_e = -\frac{e}{m} . \quad (38)$$

Danas se uzima da je sopstveni (spinski) magnetski momenat elektrona  $9,283 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$ . Ta veličina se naziva *magneton*. (§117)

**39.** Za mnoge paramagnetske supstancije, magnetska susceptibilnost je obrnuto srazmerna temperaturi:

$$\kappa = \frac{C}{T} . \quad (39)$$

Ovaj zakon ustanovio je Kiri, a klasično objašnjenje nalazi u Lanžvenovoj teoriji. Shodno njoj, parametar  $C$  je po redu veličine  $n\mu_0 p_m^2 / (3k)$ , gde je

$n$  koncentracija atoma u supstanciji,  $p_m$  je moduo magnetskog momenta atoma i  $k$  Bolcmanova konstanta. (§118)

**40.** Za tehničke transformatore u praznom hodu važi relacija

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (40)$$

Ona pokazuje da je sekundarni napon jednak primarnom naponu pomnoženom koeficijentom transformacije  $N_2/N_1$ . (§133)

**41.** Maksvelove jednačine u integralnom obliku glase:

$$\oint_{\ell} H_{\ell} dl = i + \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS, \quad (41a)$$

$$\oint_{\ell} E_{\ell} dl = - \int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS, \quad (41b)$$

$$\oint_S D_n dS = q, \quad (41c)$$

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (41d)$$

Jačina struje  $i$  može da se izrazi preko gustine struje,  $i = \int_S j_n dS$ , imajući u vidu vezu  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ . Naelektrisanje  $q$  može da se izrazi preko gustine naelektrisanja,  $q = \int_V \rho dV$ . Takodje, vektori  $\vec{B}$  i  $\vec{H}$ , kao i  $\vec{D}$  i  $\vec{E}$  su povezani, često u obliku  $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$  i  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$ . Veličine  $\epsilon$ ,  $\mu$  i  $\lambda$  su tzv. *materijalne konstante*, karakterišu svojstva sredina i ulaze u Maksvelove jednačine kao zadate veličine. (§137)

**42.** Maksvelove jednačine u vektorskoj formi glase:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (42a)$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (42b)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (42c)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (42d)$$

Detaljnije u udžbeniku. (§138)

**43.** Lorencove transformacije za elektromagnetsko polje imaju oblik

$$E_x = E_{1x}, \quad E_y = \gamma(E_{1y} - vB_{1z}), \quad E_z = \gamma(E_{1z} + vB_{1y}), \quad (43a)$$

$$H_x = H_{1x}, \quad H_y = \gamma(H_{1y} + vD_{1z}), \quad H_z = \gamma(H_{1z} - vD_{1y}). \quad (43b)$$

Skraćenica  $\gamma$  stoji za recipročnu vrednost veličine  $\sqrt{1 - \beta^2}$ , gde je  $\beta = v/c_0$  ( $c_0$  - brzina svetlosti u vakuumu). Ove relacije omogućavaju da se nadjede elektromagnetsko polje  $\vec{E}$  i  $\vec{H}$  u sistemu referencije K, koji se kreće u odnosu na drugi sistem  $K_1$  u pravcu ose  $x_1$ , u njenom pozitivnom smeru, brzinom  $v$ , ako je poznato elektromagnetsko polje  $\vec{E}_1$  i  $\vec{H}_1$  u referentnom sistemu  $K_1$ .



## GLAVA PRVA

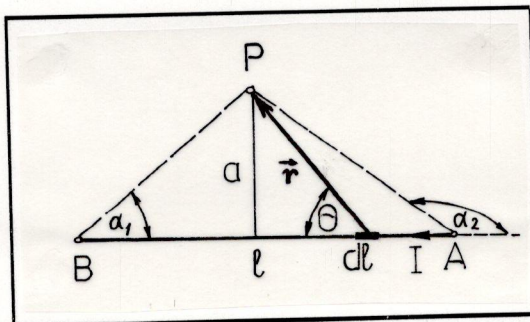
MAGNETSKO POLJE STRUJA U VAKUUMU.  
OSNOVNE KONFIGURACIJE

## 1.

Odrediti vektor magnetske indukcije u okolini tankog, pravog provodnika konačne dužine kojim protiče struja zadate jačine.

## Rešenje

Označimo sa  $I$  jačinu struje u provodniku. Dužina provodnika je  $\ell$  (Slika 1a). Vektor magnetske indukcije  $\vec{B}$  određujemo u tački  $P$ . Označimo sa  $a$  rastojanje tačke  $P$  od provodnika. Smisao uglova  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  jasan je sa Slike 1a. Ako je pozitivni smer struje od desnog ka levom kraju provodnika, po pravilu desnog zavrtnja pravac vektora magnetske indukcije poklapa se sa normalom na ravan crteža u tački  $P$ , a smer je od posmatrača prema crtežu. Ostaje još da odredimo intenzitet magnetske indukcije  $B$ .



Slika 1a

Uočimo strujni elemenat  $Idl$  u tački iz koje se duž  $a$  vidi pod uglom  $\theta$ . Po Bio-Savar–Laplasovom zakonu biće

$$dB = \frac{\mu_0 Idl \sin \theta}{4\pi r^2}. \quad (1)$$

Pošto je  $r = a / \sin \theta$  i kako važi  $\sin \theta dl = a d\theta / \sin \theta$  (videti komentar ovog zadatka), tada jednačina (1) daje

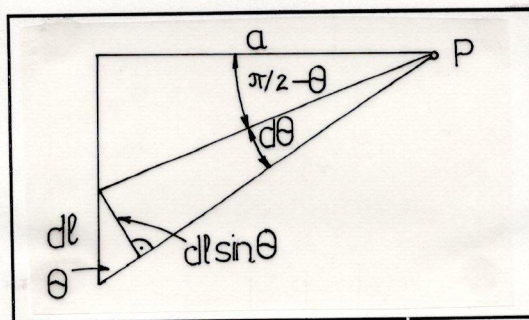
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \theta d\theta. \quad (2)$$

Ostaje da saberemo doprinose svih strujnih elemenata provodnika. Da to postignemo, vršimo integraciju izraza (2) po uglu  $\theta$  u granicama od  $\theta_1 = \pi - \alpha_2$  do  $\theta_2 = \pi - \alpha_1$ . Lako se dobija definitivni rezultat za intenzitet magnetske indukcije:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (3)$$

#### Pitanja i komentari

Veza diferencijala  $d\ell$  i  $d\theta$ , koju smo koristili u gornjem izvodjenju, postaje očigledna ako se poslužimo skicom sa Slike 1b



Slika 1b

Naravno, formula (3) može biti zapisana i posredstvom drugih parametara. Tako, ako uvedemo unutrašnje uglove  $\beta_A = \pi - \alpha_2$  i  $\beta_B = \alpha_1$ , dobijamo oblik

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \beta_A + \cos \beta_B). \quad (4)$$

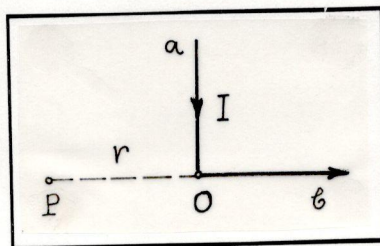
Napišite formulu za magnetsku indukciju  $B$  u kojoj će figurisati dužine  $a$  i  $\ell$ . U tom slučaju, je li potrebno specificirati još neki parametar? Sa stanovišta ekonomisanja geometrijskim veličinama koji biste optimalni obrazac za  $B$  predložili?

---

## 2.

---

Duž dugog i tankog provodnika, koji je savijen pod pravim uglom (Slika 2), teče struja jačine  $I$ . a) Odrediti vektor magnetske indukcije  $\vec{B}$  u tački P (koja je na rastojanju  $r$  od temena O, na produžetku jedne od stranica provodnika). b) Izračunati intenzitet magnetske indukcije  $B$  ako je  $I = 10$  A i  $r = 1$  cm.



Slika 2

## Rešenje

a) Prema rezultatu zadatka 1 možemo napisati

$$B_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2), \quad (1)$$

za indukciju koja potiče od dela  $aO$  provodnika, ako uzmemo da je  $\beta_1 = 0^\circ$  i  $\beta_2 = 90^\circ$ . Indukcija  $B_{\parallel}$  koja potiče od dela provodnika  $Ob$  jednaka je nuli na osnovu Bio-Savar-Laplasovog zakona u vektorskom obliku. Na taj način, uz korišćenje principa superpozicije, dobijamo  $B = B_{\perp} + B_{\parallel} = B_{\perp}$  odnosno

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}. \quad (2)$$

Vektor  $\vec{B}$  je u pravcu normale na ravan crteža u tački P, a usmeren je od posmatrača prema crtežu.

b) Za date vrednosti struje i rastojanja, biće

$$B = 10^{-4} \text{ T}. \quad (3)$$

Dobili smo da je magnetska indukcija u tački P desetohiljaditi deo tesle.

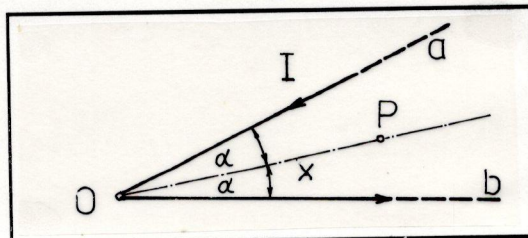
## Pitanja i komentari

U praksi se još uvek mnogo koristi Gausov sistem jedinica. Izrazite rezultat (3) u gausima. Kratak pregled pojedinih mernih sistema čitalac može naći u Udžbeniku (videti *Prilog 1. Gausov sistem jedinica*).

Postoji jedna laka provera tačnosti rezultata (2): setite se kolika je magnetska indukcija u okolini pravog, tankog, vrlo dugog provodnika sa strujom (odgovor dobijate kad u zadatku 1 dopustite da  $l \rightarrow \infty$ ). Završite argumentaciju.

## 3.

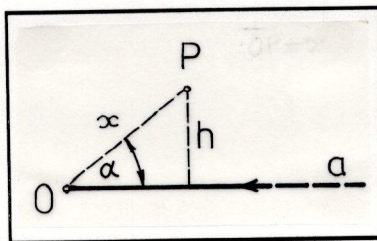
Struja jačine  $I$  teče vrlo dugim, tankim, u delovima pravim provodnikom koji je savijen tako da čini ugao  $2\alpha$  (Slika 3a). a) Odrediti vektor magnetske indukcije  $\vec{B}$ , u tački P, koja se nalazi na simetrali ugla, na rastojanju  $x$  od temena ugla. b) Izračunati intenzitet magnetske indukcije, ako je  $I = 6,28 \text{ A}$ ,  $\alpha = 15^\circ$  i  $x = 1 \text{ cm}$ .



Slika 3a

## Rešenje

a) Nadjimo prvo magnetsku indukciju (označimo je  $B_1$ ) koja potiče od dela  $aO$  provodnika (Slika 3b):



Slika 3b

Primenićemo u stvari rešenje nama poznato iz zadatka 1; shodno njemu, možemo pisati

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} (\cos \alpha + 1) \quad (1)$$

gde je  $h$  visina spuštena iz tačke P na stranicu  $aO$ . Pošto je  $h = x \sin \alpha$ , biće

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left( \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right). \quad (2)$$

Predjimo sada na određivanje komponente  $B_2$  (magnetske indukcije koja potiče od grane  $Ob$ ). Primećujemo da je slika simetrična i otud zaključujemo da mora biti

$$B_2 = B_1. \quad (3)$$

Sada primenom principa superpozicije nalazimo traženu magnetsku indukciju u tački P :

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \left( \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right). \quad (4)$$

Vektor  $\vec{B}$  je usmeren od crteža prema posmatraču.

b) Zamenom datih vrednosti dobijamo  $B = 0,95 \text{ mT}$ .

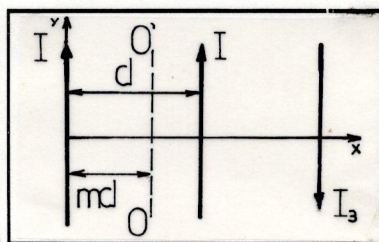
#### Pitanja i komentari

Skicirajte funkciju  $B = f(\alpha)$ . Ako je  $\alpha = 90^\circ$ , sledi li iz formule (4) poznati rezultat za beskonačni tanki pravi provodnik? Nadajte  $\lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} B$ . Je li taj rezultat logičan? Sledi li rezultat zadatka 2 za  $\alpha = 45^\circ$ ?

Uproстите trigonometrijski faktor u relaciji (4) (uputstvo: primeniti formule za polovinu ugla).

#### 4.

Dva vrlo duga, prava, tanka provodnika postavljena su međusobno paralelno, na rastojanju  $d$ . Kroz oba provodnika teče struja iste jačine  $I$ , u istom smeru (Slika 4).



Slika 4

a) Gde treba postaviti treći provodnik istih karakteristika, u ravni koju čine dva prethodna provodnika, da bi linija nultog magnetskog polja bila između prvih dva provodnika, na rastojanju  $md$  ( $0 < m < 1$ ) od prvog provodnika. Uzeti da kroz treći provodnik protiče struja  $I_3 = kI$  ( $k > 1$ ) u pokazanom smeru.

b) Izračunati položaj trećeg provodnika ako je  $k = 4$ ,  $m = 3/4$  i  $d = 4 \text{ cm}$ .

#### Rešenje

a) Postavimo koordinatni sistem kao što je prikazano na slici (pozitivan smer  $z$  ose usmeren je od crteža prema posmatraču). Prema principu superpozicije, u tačkama koje pripadaju pravouj OO' imaćemo magnetsko polje

čija se jačina izračunava kao zbir tri komponente:

$$H_z = H_1 + H_2 + H_3, \quad (1)$$

gde je

$$H_1 = -\frac{I}{2\pi md}, \quad (2)$$

$$H_2 = +\frac{I}{2\pi(1-m)d}, \quad (3)$$

$$H_3 = -\frac{kI}{2\pi(x-md)}. \quad (4)$$

Ove tri formule odmah slede iz teoreme o cirkulaciji vektora  $\vec{H}$  (teorema o magnetskom naponu). Inače, lako se dobijaju iz rezultata zadatka 1 u limesu  $\ell \rightarrow \infty$ . Smenjujući izraze (2), (3) i (4) u (1) dobijamo

$$H_z = \frac{I}{2\pi} \left( -\frac{1}{md} + \frac{1}{(1-m)d} - \frac{k}{x-md} \right). \quad (5)$$

Po uslovu zadatka, desnu stranu ove relacije treba anulirati. To daje

$$\frac{1}{md} - \frac{1}{(1-m)d} + \frac{k}{x-md} = 0. \quad (6)$$

Rešavajući zadnju jednačinu po  $x$  imamo

$$x = md \left( 1 + k \frac{1-m}{2m-1} \right). \quad (7)$$

b) Smenom datih vrednosti iz zadnje formule lako se dobija vrednost  $x = 9$  cm.

#### Pitanja i komentari

Ako bi se zahtevalo da  $m \rightarrow 1/2$ , formalna zamena u (7) bi dala  $x \rightarrow \infty$ . Kako tumačite taj rezultat?

Skicirajte zavisnost  $x = f(m)$  koristeći relaciju (7). Mogu li se pojaviti oblasti gde je  $x$  negativno? Može li biti  $0 < x < d$ ?

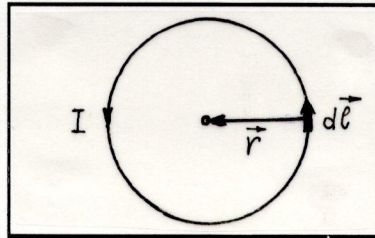
### 5.

a) Naći magnetsku indukciju  $\vec{B}$  u centru kruga poluprečnika  $r$ , ako po obimu teče struja jačine  $I$ . b) Izračunati brojnu vrednost magnetske indukcije  $B$  ako je  $I = 1$  A i  $r = 0,5$  m.

## Rešenje:

a) Prema Bio-Savar–Laplasovom zakonu element  $I d\vec{\ell}$  daje magnetsko polje (na mestu definisanom vektorom položaja  $\vec{r}$ ) indukcije

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (1)$$



Slika 5

Struja koja ima smer kao na Slici 5 davaće magnetsku indukciju normalnu na ravan crteža, usmerenu prema čitaocu. Intenzitet vektora magnetske indukcije nalazimo integracijom izraza (1) po obimu kruga

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} d\ell = \frac{\mu_0 I}{2r}. \quad (2)$$

Vidimo da je jačina magnetskog polja u centru jednaka količniku jačine struje i prečnika kružne konture, tj.  $H = I/D$  (gde je  $D = 2r$ ).

b) Zamena brojnih vrednosti u izraz (2) daje

$$B = 4\pi 10^{-7} \text{ T}. \quad (3)$$

## Pitanja i komentari

Jačina magnetskog polja meri se jedinicom A/m (amper po metru). Izvesnu predstavu kolika je to jedinica čitalac može steći iz rezultata (3). U mnogim knjigama koristi se, još uvek, za merenje jačine magnetskog polja jedinica Ö (ersted). Veza izmedju ove dve jedinice je

$$1 \text{ Ö} = \frac{10^3 \text{ A}}{4\pi \text{ m}}. \quad (4)$$

O principima formiranja sistema jedinica kojem pripada ersted čitalac može pročitati u udžbeniku, paragraf §77. U knjigama koje umesto SI sistema koriste Gausov sistem jedinica, relacija (2) se piše u obliku

$$H = \frac{2\pi I}{rc}, \quad (5)$$

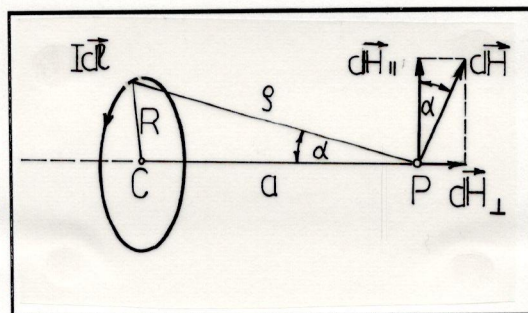
gde je  $c \simeq 3 \cdot 10^{10}$  cm/s takozvana elektrodinamička konstanta. Pokušajte polazeći od relacija (2) i (5), da pokažete ispravnost odnosa (4). Napomena: ponoviti šta je CGSE jedinica za merenje struje i koji je njen odnos prema amperu (videti u udžbeniku paragraf §77).

Ako u okviru klasičnog Borovog modela atoma vodonika, zamislimo da se elektron vrti oko protona na rastojanju  $r = 0,5 \cdot 10^{-10}$  m, naći vrednost magnetske indukcije u centru atoma, primenjujući rezultat iz ovog zadatka (Rešenje:  $B = \mu_0 I / 2r = \mu_0 e^2 / 2r \sqrt{16\pi^3 \epsilon_0 r^3 m} = 14,37$  T).

## 6.

Provodnik je savijen u obliku kruga, poluprečnika  $R$ . Kroz provodnik protiče struja jačine  $I$ . a) Odrediti vektor jačine magnetskog polja u tački P koja leži na osi simetrije strujne konture, na rastojanju  $a$  od centra. b) Izračunati moduo vektora jačine magnetskog polja ako je  $R = 5$  cm,  $I = 5$  A i  $a = 5$  cm.

Rešenje



Slika 6

a) Podjimo od Bio-Savar-Laplasovog zakona. Strujni elemenat  $Idl$  izaziva magnetsko polje jačine

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}. \quad (1)$$

Posmatrajući Sliku 6 zaključujemo da treba staviti  $\theta = 90^\circ$  i  $r = \rho$ , pa možemo pisati:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl}{\rho^2}. \quad (2)$$

Iz razloga simetrije je jasno da treba jedino razmatrati onu komponentu vektora  $d\vec{H}$  koja je usmerena duž ose simetrije; označimo je sa  $d\vec{H}_\perp$ . Budući



da je (videti Sliku 6)  $dH_{\perp} = dH \sin \alpha$ , imaćemo

$$dH_{\perp} = \frac{Idl}{4\pi\rho^2} \sin \alpha. \quad (3)$$

Pošto je  $\sin \alpha = R/\rho$ , imamo

$$H_{\perp} = \frac{IR}{4\pi\rho^3} \int_0^{2\pi R} dl, \quad (4)$$

što posle integracije daje

$$H_{\perp} = \frac{IR^2}{2\rho^3}. \quad (5)$$

Imajući u vidu da je  $\rho = \sqrt{a^2 + R^2}$ , možemo definitivno zapisati traženi izraz za jačinu magnetskog polja u obliku

$$H_{\perp} = \frac{I}{2} \frac{R^2}{(\sqrt{R^2 + a^2})^3}. \quad (6)$$

b) Zamenom brojnih vrednosti dobijamo

$$H_{\perp} \simeq 17,68 \text{ A/m}. \quad (7)$$

#### Pitanja i komentari

Kada  $a \rightarrow 0$  problem se, očito, svodi na nalaženje polja u centru kružne konture. Proverite da li je  $\lim_{a \rightarrow 0} H_{\perp}$  saglasno sa rešenjem nadjenim u zadatku 5.

Ako je  $a \gg R$ , jačina magnetskog polja opada sa kubom rastojanja. Formalno, to nas podseća na strukturu električnog polja u okolini električnog dipola. Uporedite formule i nadjite analogne karakteristike.

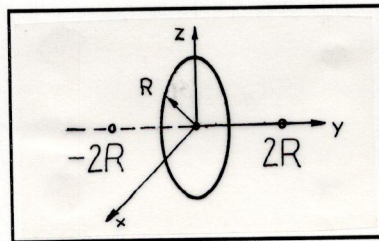
Problem izračunavanja magnetskog polja u tačkama van ose simetrije znatno je teži. Postupci i formule su komplikovane čak i u slučaju  $a = 0$  (dobijaju se tzv. eliptičke funkcije). Sa matematičke tačke gledišta slične se teškoće javljaju i kod odgovarajućih zadataka elektrostatike. Primera radi, kad odredjujemo potencijal oko provodnika kružnog oblika, poluprečnika  $a$ , koji je ravnomerno naelektrisan linijskom gustinom naelektrisanja  $\tau$ , dobija se rezultat  $\varphi(r) = 4\tau x^p K(x^q)$ , gde je  $x = a/r$ ; u ravni kruga, za  $r < a$  je  $p = 0$  i  $q = -1$  dok za  $r > a$  važi  $p = q = 1$ . Oznaka  $K$  stoji za potpuni normalni Ležandrov eliptički integral prve vrste. Zainteresovani čitalac

može matematičke detalje iz ove oblasti pročitati u knjizi *D. S. Mitrinović, D. Ž. Djoković, Specijalne funkcije, Gradjevinska knjiga, Beograd 1964, str. 175.*

U ovom zadatku izračunavali smo jačinu magnetskog polja, a ne magnetsku indukciju. U vakuumu, raditi sa dva vektora,  $\vec{H}$  i  $\vec{B}$ , nema posebnog fizičkog smisla, mada mnogi autori, iz praktičnih razloga, prelaze preko te činjenice. Iz definicije vektora  $\vec{H}$  zaključujemo da je on određena kombinacija vektora magnetske indukcije i magnećenja supstancije, te se može shvatiti kao pomoćna fizička veličina koja, ponekad, dovodi do tehničkog uprošćavanja računa, kao u slučajevima primene teoreme o magnetskom naponu. Pravu fizičku suštinu ima vektor magnetske indukcije  $\vec{B}$ .

## 7.

Po krugu  $x^2 + z^2 = R^2$  teče struja jačine  $I$ . Ona daje magnetsku indukciju u tačkama  $y = \pm 2R$  intenziteta  $B$  (videti Sliku 7). a) Odrediti jačinu struje  $I$  ako se smatra da su  $R$  i  $B$  poznate veličine. b) Izračunati  $I$  ako je  $B = 70 \mu\text{T}$  i  $2R = 6370 \text{ km}$ .



Slika 7

## Rešenje

a) Nama je poznata magnetska indukcija koju daje kružna strujna kontura na svojoj osi simetrije (videti zadatak 6). Ako taj izraz prilagodimo konfiguraciji sa Slike 7 imaćemo

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + 4R^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

odnosno,

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{5^{3/2}R}. \quad (2)$$

Odavde lako dobijamo traženu jačinu struje

$$I = \frac{\sqrt{500}RB}{\mu_0}. \quad (3)$$

b) Ako uzmemo da je  $B = 7 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  i  $R = 3,185 \cdot 10^6 \text{ m}$  dobićemo

$$I = 3,97 \cdot 10^9 \text{ A.} \quad (4)$$

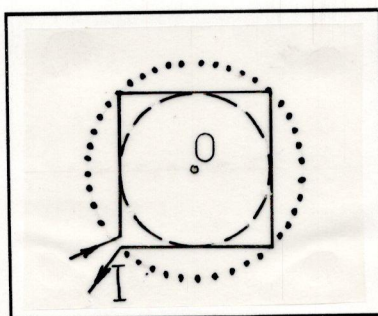
Tražena struja bi morala imati ogromnu vrednost od blizu četiri gigaampera.

#### Pitanja i komentari

Poznato je da magnetska indukcija na zemljinim polovima iznosi oko  $7 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ . Misli se da zemljino polje mora poticati od nekih struja u zemljinom jezgru koje je u tečnom stanju. Ovakav zadatak je grub model te pojave, za procenu jačine struje. Ali, može se napraviti i mnogo drugih modela. Na primer čitalac neka pokuša da polje na polovima poistoveti sa poljem na krajevima dugog solenoida i da tako odredi podužnu gustinu struje hipotetičnog solenoida (dobija se da je  $j_{\ell} \simeq 111 \text{ A/m}$ ).

### 8.

Kroz provodnik u obliku kvadrata stranice  $a$  protiče struja jačine  $I$ . a) Odrediti magnetsku indukciju u tački O (centar kvadrata, Slika 8). b) U istoj tački, odrediti magnetsku indukciju ako bi provodnik bio upisan krug u dati kvadrat (na Slici 8, kontura označena crticama). c) Odrediti magnetsku indukciju u tački O ako bi se strujna kontura podudarala sa opisanim krugom za dati kvadrat (krug predstavljen tačkicama na Slici 8). U kojem slučaju je magnetska indukcija najveća?



Slika 8

#### Rešenje

Prvo, odredimo pravac i smer vektora  $\vec{B}$ . Za dati smer struje, po pravilu desnog zavrtnja ustanovljavamo da  $\vec{B}$  ima pravac normale spuštene na ravan crteža, u tački O, a vektor je usmeren od posmatrača prema crtežu.

a) Indukciju koja potiče od jedne stranice kvadrata dobijamo iz rezultata

zadatka 1, stavljajući  $\beta_A = \beta_B = 45^\circ$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a/2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (1)$$

odnosno posle sredjivanja

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a}. \quad (2)$$

Ceo kvadrat će dati četiri puta veću indukciju:

$$B_\circ = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\mu_0 I}{a}. \quad (3)$$

Na osnovu rešenja zadatka 5, možemo neposredno pisati izraz za magnetsku indukciju koje se traži pod b)

$$B_\circ = \frac{\mu_0 I}{a}, \quad (4)$$

odnosno izraz

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}a}, \quad (5)$$

koji se traži u delu zadatka pod c). Pošto je  $1 > 2\sqrt{2}/\pi > 1/\sqrt{2}$ , vidimo da je najveća indukcija koja potiče od konture upisanog kruga.

#### Pitanja i komentari

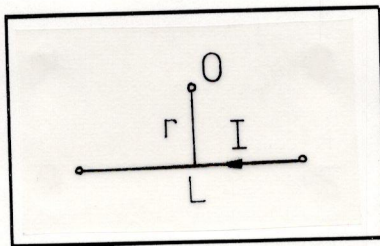
Primetimo da analiza ovog zadatka može dati ideju kako da približno ocenimo veličinu magnetskog polja, dajući granice u kojima ta vrednost mora ležati. Očito, u našem slučaju važi:  $B_O < B_\circ < B_\circ$ .

Imajući to u vidu, pokušajte da za konturu oblika desetougona odredite maksimalnu grešku koja se ukazanom procedurom može učiniti. U našem primeru, greška nije veća od nekih 40%.

Pokušajte da sami definišete nekoliko drugačijih zadataka kod kojih je ponudjeni aproksimativni metod efikasan.

## 9.

Kroz pravi tanki provodnik dužine  $L$  teče struja jačine  $I$ . Uočimo tačku  $O$  koja se nalazi na rastojanju  $r$  od sredine provodnika (videti Sliku 9).



Slika 9

Koliko puta se poveća magnetska indukcija u tački  $O$  ako oko nje savijemo dati provodnik po krugu poluprečnika  $r$ ?

## Rešenje

Označimo vrednost magnetske indukcije u tački  $O$  pre savijanja provodnika sa  $B_1$ . Prema rezultatu zadatka 1 možemo odmah pisati

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \beta. \quad (1)$$

S druge strane, kružni provodnik će u tački  $O$  davati magnetsku indukciju  $B_2$ . Shodno rešenju zadatka 5 biće

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2r}. \quad (2)$$

imajući u vidu relacije (1) i (2) lako dobijamo

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\pi}{\cos \beta}. \quad (3)$$

Zadatak, kako smo ga ovde definisali, ima smisla ako se provodnik može saviti u kružnicu tj. ako je

$$2\pi r = L. \quad (4)$$

Vidimo da mora biti

$$\cos \beta = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2r/L)^2}}. \quad (5)$$

odavde, posle smene  $2r/L = 1/\pi$ , dobijamo

$$\cos \beta = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 1}}. \quad (6)$$

Smenjujući (6) u (3), nalazimo

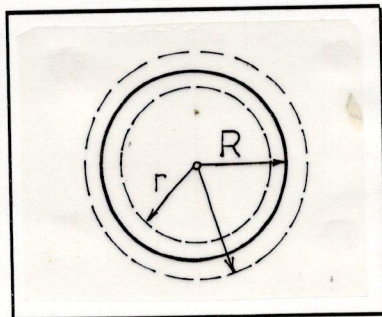
$$\frac{B_2}{B_1} = \sqrt{\pi^2 + 1}. \quad (7)$$

**Pitanja i komentari**

Formulišite samostalno sličan zadatak, kada se provodnik savija čineći neku drugu geometrijsku figuru oko date tačke. Uporedite rezultate.

**10.**

Duž dugog, pravog, punog kružnog cilindra radijusa  $R$  teče struja konstantne jačine  $i$  a) Naći jačinu magnetskog polja u i van provodnika. b) Na kojem rastojanju  $r_m$  od ose provodnika će jačina magnetskog polja biti ista kao i na krugu poluprečnika  $R/m$ , gde je  $m$  dati realni broj veći od jedinice. Takođe, izračunati  $r_m$  i  $H(r_m)$  ako je  $i = 1$  A,  $R = 1$  cm i  $m = 2$ .



Slika 10

**Rešenje**

a) Linije vektora  $\vec{H}$  su kružnice s centrom na osi provodnika. Jačina polja  $H = |\vec{H}|$  je jedino funkcija od radijusa  $r$ . Zato, teorema o cirkulaciji će odmah dati, imajući u vidu konturu  $L_{r>R}$

$$H 2\pi r = i, \quad (1)$$

te je, prema tome, magnetsko polje van provodnika

$$H_{r>R} = \frac{i}{2\pi r}. \quad (2)$$

Na sličan način, cirkulacija po konturi  $L_{r<R}$  daje

$$H 2\pi r = i_r \quad (3)$$

gde je  $i_r$  ukupna jačina struje kroz tu konturu, tj.  $i_r = (r/R)^2 i$ . Dakle, tražena jačina polja u provodniku je

$$H_{r < R} = \frac{1}{2\pi} \frac{ir}{R^2}. \quad (4)$$

Vidimo da jačina magnetskog polja prvo linearno raste, a onda, van provodnika, hiperbolično opada.

b) Po uslovu zadatka biće

$$\frac{1}{2\pi} \frac{i}{r_m} = \frac{1}{2\pi} \frac{iR}{mR^2}, \quad (5)$$

odakle je

$$r_m = mR. \quad (6)$$

Zamenom posebnih vrednosti dobijamo

$$r_m = 2 \text{ cm}, \quad H(r_m) = 7,96 \text{ A/m}. \quad (7)$$

Ili, to je indukcija od desetog dela jednog *gausa*, približno.

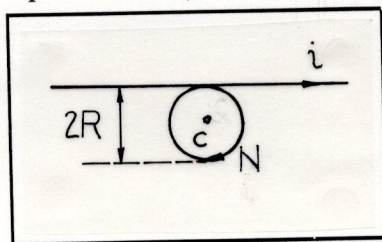
#### Pitanja i komentari

Korisno je uveriti se da u granici  $R \rightarrow 0$  dobijamo rezultat za magnetsku indukciju koju daje beskonačni, tanki, pravi strujni provodnik, kao što je komentarisano u zadatku 1.

Šta se menja ako je cilindar šupalj? Može li tada unutra biti magnetskog polja? Ako materijal cilindra ima susceptibilnost  $\kappa$ , kako će izgledati grafik magnetske indukcije u i oko provodnika?

### 11.

Veoma dugi, pravi provodnik savijen je na jednom mestu u krug  $N$  puta, čime je oformljena petlja poluprečnika  $R$ , posle čega je taj provodnik ponovo postavljen duž istog pravca (Slika 11). a) Odrediti broj navoja  $N$  tako da uticaj pravog provodnika sa strujom na jačinu magnetskog polja u centru petlje ne bude veći od  $\delta$  procenata. b) Izračunati  $N$  ako je  $\delta = 0,317\%$ .



Slika 11

## Rešenje

Bez obzira na to što su prava i krug izvedene od neprekinutog komada žice, očividno ovde možemo superponirati polja koja potiču od prave i kruga u tački C

$$H_C = H_1 + H_0. \quad (1)$$

Vektor jačine magnetskog polja  $\vec{H}$  usmeren je u tački C od nas prema crtežu. Provodnik daje jačinu

$$H_1 = \frac{i}{2\pi R}, \quad (2)$$

dok krug sa ukupnom strujom  $Ni$  doprinosi

$$H_0 = \frac{Ni}{2R}. \quad (3)$$

Prema tome će biti

$$H_C = \frac{i}{2R} \left( N + \frac{1}{\pi} \right). \quad (4)$$

Zanemarimo li magnetsko delovanje provodnika, biće

$$H_C^{\text{aprox}} = \frac{Ni}{2R}. \quad (5)$$

Pri tome se čini procentualna greška

$$\delta = \frac{H_C - H_C^{\text{aprox}}}{H_C} 100 \quad (6)$$

odnosno,

$$\delta = \frac{100}{1 + \pi N}. \quad (7)$$

Odavde nalazimo broj navoja

$$N = \frac{100}{\pi \delta} - \frac{1}{\pi}. \quad (8)$$

b) Za  $\delta = 0,317\%$  nalazimo

$$N = \frac{100}{0,317\pi} - \frac{1}{\pi} = 100. \quad (9)$$



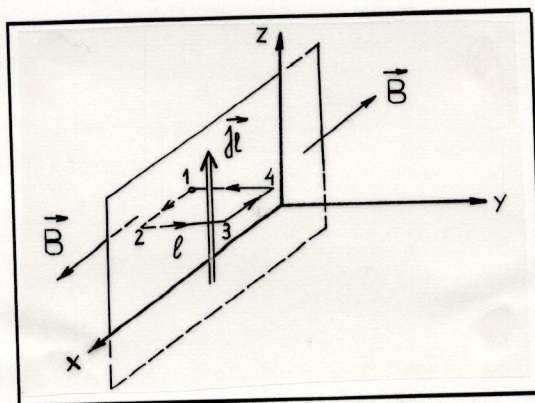
## Pitanja i komentari

Naravno, podrazumeva se da je žica izlovana. Pokušajte da komentarišete situaciju u opitu kada to ipak ne bi bio slučaj.

Je li moguće tako obići tačku C da bude  $H_C \simeq 0$ ?

## 12.

Po neograničenoj provodnoj ravni teče struja linijske gustine  $j_\ell$ . Struja je ravnomerno raspodeljena i u svakoj tački ima isti pravac i smer. a) Odrediti magnetsku indukciju tog strujnog plašta. b) Izračunati jačinu magnetskog polja u prostoru oko plašta ako je  $j_\ell = 2 \cdot 10^3 \text{ A/m}$ .



Slika 12a

## Rešenje

a) Poistovetimo strujni plašt sa  $xOz$  ravni pravouglog Dekartovog sistema sa Slike 12a. Neka je vektor  $\vec{j}_\ell$  u smeru  $z$  ose, tj. uzmimo da je  $\vec{j}_\ell = j_\ell \vec{e}_z$  (gde je  $\vec{e}_z$  ort  $z$  ose). Strujni plašt možemo zamisliti kao skup strujnih niti. Na taj način uvidjamo da u poluprostoru  $y > 0$  vektor magnetske indukcije ima oblik  $\vec{B} = -B \vec{e}_x$  ( $\vec{e}_x$  je ort  $x$  ose). S druge strane ravni, za  $y < 0$  mora biti  $\vec{B} = B \vec{e}_x$ .

Nadjimo sada magnetski napon duž putanje  $L$ ; to je zamišljeni pravougaonik 1-2-3-4 sa Slike 12a koji leži u ravni  $xOy$ . Stranice su mu paralelne osama  $x$  i  $y$ , a strujni plašt ga polovi. Po teoremi o magnetskom naponu biće

$$2H\ell = I, \quad (1)$$

gde je  $I$  ukupna struja koja teče plaštom a prodire kroz ravan konture (po dužini  $\ell$ ). Pošto je, po definiciji linijske gustine struje,  $j_\ell = I/\ell$  odmah

dobijamo (budući da je za vakuum  $B = \mu_0 H$ )

$$B = \frac{\mu_0}{2} j_\ell . \quad (2)$$

Vidimo, magnetsko polje je homogeno.

b) Zamenom posebnih vrednosti dobijamo

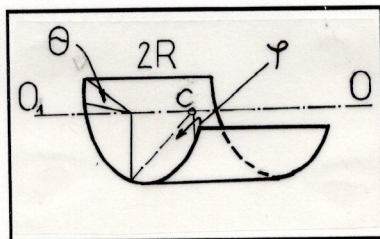
$$H = 10^3 \text{ A/m} . \quad (3)$$

#### Pitanja i komentari

Uočite da dva velika, paralelna strujna plašta, blisko postavljena jedan drugom, daju unutra homogeno magnetsko polje indukcije  $B = \mu_0 j_\ell l$ , pod uslovom da su struje suprotno usmerene. Van ovog sistema neće biti magnet-skog polja. Predložite, na osnovu toga, ideju za konstrukciju laboratorijskog izvora magnetskog polja koji bi imao niz poželjnih osobina, kao što su pristupačnost, veća korisna zapremina, visok stepen homogenosti itd.

Postoji fizička analogija između ovog zadatka i zadatka nalaženja električnog polja ravnog kondenzatora. Objasnite detalje. Korisno je setiti se i izraza za jačinu električnog polja blizu naelektrisane metalne površine.

Izraz (2) važi približno i za indukciju blizu ograničenog, ali velikog strujnog plašta (kada se mogu zanemariti efekti krajeva). Pokušajte da nadjete magnetsku indukciju na osi cilindra u tački C ako je strujni plašt deo strujnog cilindra (Slika 12b). Strujnice su paralelne osi  $OO_1$ . Uputstvo: strujni plašt posmatrati kao skup strujnih niti s jačinom struje  $j_\ell R d\theta$ , koristiti ideju zadatka 1 i osobine simetrije. (Rezultat:  $B = \mu_0 j_\ell / \pi \sqrt{2}$ ; za veoma dug polucilindar rezultat je  $B_\infty = \mu_0 j_\ell / \pi$ ).

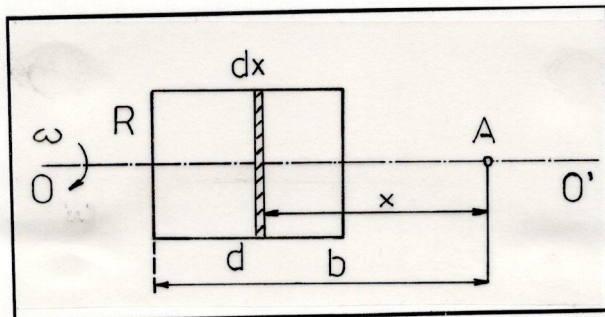


Slika 12b

Kolika je magnetska indukcija ako su strujnice polukružnice oko ose  $OO_1$ ? Uputstvo: Imati u vidu zadatak 6 (samo ga prilagoditi za polukrugžnicu); prvo, kroz strujnu nit protiče struja jačine  $R j_\ell d\varphi / \cos^2 \varphi$ ; drugo, treba uzeti u obzir samo komponentu proporcionalnu sa  $\cos \varphi$  (simetrija!); treće, integriti od  $-\pi/4$  do  $+\pi/4$  za plašt visine  $2R$  ili, za vrlo dugi plašt, u granicama  $-\pi/2$  do  $+\pi/2$ .

## 13.

Cilindar dužine  $d$ , kružnog poprečnog preseka, poluprečnika  $R$ , ravnomerno je naelektrisan. Površinska gustina opterećenja je  $\sigma$ . Cilindar rotira oko ose  $OO'$  (Slika 13) ugaonom bezinom  $\omega$ . a) Naći jačinu magnetskog polja na osi, u tački A koja je na udaljenosti  $b$  od početka cilindra. b) Izračunati jačinu magnetskog polja na kraju veoma dugog cilindra ( $d \gg R$ ), ako je period rotacije  $T = 10^{-1}$  s,  $\sigma = 1$  C/m<sup>2</sup> i  $R = 5$  cm.



Slika 13

## Rešenje

a) Iskoristimo nama poznati rezultat za polje koje potiče od strujne kružne konture u tačkama normale na konturi. Prema jednačini (6) zadatka 6 imamo za naš slučaj

$$dH = \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \frac{dI}{2}. \quad (1)$$

Opterećenje koje rotira predstavlja neku kružnu struju; segment  $dx$  pri tom odgovara struji jačine

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma dS}{2\pi/\omega}, \quad (2)$$

koja se s obzirom da je  $dS = 2\pi R dx$  može predstaviti kao

$$dI = \omega \sigma R dx. \quad (3)$$

Taj segment daje u tački A polje jačine

$$dH = \frac{1}{2} \omega \sigma R \frac{R^2 dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}, \quad (4)$$

što dobijamo zamenom (3) u (1). Da bi se našla kontribucija cele površine cilindra, treba integraliti izraz (4)

$$H = \frac{\omega \sigma R^3}{2} \int_{b-d}^b \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}, \quad (5)$$

što se može predstaviti u obliku

$$H = \frac{\omega\sigma R^3}{2} J. \quad (6)$$

Ovde smo sa  $J$  označili gornji integral. On se može, pomoću smene  $t = x/R$ , dovesti na oblik

$$J = \frac{1}{R^2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}, \quad (7)$$

gde je  $t_1 = (b-d)/R$  i  $t_2 = b/R$ . Integral koji je nastao je tablični i ima vrednost  $t/\sqrt{1+t^2}$ . Prema tome, možemo pisati

$$R^2 J = \frac{b/R}{\sqrt{1+(b/R)^2}} - \frac{(b-d)/R}{\sqrt{1+[(b-d)/R]^2}}. \quad (8)$$

Dakle, traženi rezultat je

$$H = \frac{\omega\sigma R}{2} \left[ \frac{b/R}{\sqrt{1+(b/R)^2}} - \frac{(b-d)/R}{\sqrt{1+[(b-d)/R]^2}} \right]. \quad (9)$$

b) Pošto je tražena jačina polja  $\omega\sigma R/2$  (o tome će biti reči dalje u tekstu), vidimo da će biti:

$$H_{\rightarrow} = \frac{\pi}{2} \text{ A/m}. \quad (10)$$

#### Pitanja i komentari

Ako je  $\sigma > 0$  a cilindar rotira, kad se gleda iz tačke A, u smeru koji je suprotan smeru rotacije kazaljki na časovniku, koji je smer vektora  $\vec{H}$ ? (Odgovor: smer od cilindra, videti zadatak 6). Pokažite da u graničnom procesu  $b \rightarrow d$  sledi

$$H = \frac{\omega\sigma}{2} \frac{d}{\sqrt{1+(d/R)^2}}. \quad (11)$$

Ako je, još,  $d \gg R$ , uočite da će biti

$$H \simeq \frac{1}{2} \omega\sigma R. \quad (12)$$

Veličinu  $\omega\sigma R$  možemo da shvatimo kao linijsku gustinu struje ekvivalentnog solenoida. Označimo je sa  $j_{\ell}$ . Tada gornji rezultat govori da je jačina magnetskog polja na kraju dugog solenoida jednaka

$$H_{\rightarrow} = \frac{1}{2} j_{\ell}. \quad (13)$$

Da li je to logičan rezultat? Pokušajte da primenom principa superpozicije opravdate relaciju (13)!

Pokušajmo sada da dobijemo i jačinu polja u centru cilindra. Proverite da se u graničnom slučaju  $b \rightarrow d/2$  dobija

$$H_{\odot} = \omega \sigma R \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (14)$$

gde je  $\xi = d/2R$ . Ako je to tako, izvedite iz jednačine (14) i formulu

$$H_{\infty} = j_{\ell}, \quad (15)$$

za jačinu magnetskog polja u beskonačno dugom solenoidu (uporedite sa formulom (8) u Uvodu, uz primedbu da je  $nI = j_{\ell}$ ).

Kako je moguće, pomoću relacije (11), reprodukovati neke od rezultata zadatka 12? Koje su pretpostavke pri tom nužne?

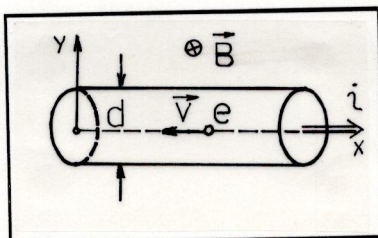


## GLAVA DRUGA

MAGNETSKO POLJE STRUJA U VAKUUMU.  
MAGNETSKE SILE

## 14.

Od bakra mase  $m = 7 \text{ g}$  napravljena je prava žica dijametra  $d = 1 \text{ mm}$ . Kroz taj provodnik protiče struja jačine  $i = 1 \text{ A}$ . Provodnik se nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije  $B = 1 \text{ T}$  (videti Sliku 14). a) Naći magnetsku silu na provodnik. b) Naći ukupnu Lorencovu silu na sve provodne elektrone u žici ako uzmemo da se oni kreću s desna na levo srednjom brzinom  $v = 75,75 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$ .



Slika 14

## Rešenje

a) Iz definicije za magnetsku silu  $d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B}$  nalazimo formulu koja odgovara uslovima našeg zadatka

$$\vec{F} = i l B \vec{e}_y . \quad (1)$$

Intenzitet ove sile je  $1 \text{ N}$ . Naime, dužina žice je  $\ell = m/\rho S$ . Za bakar je gustina  $\rho = 8,9 \text{ g/cm}^3$ . Tako izračunavamo da je  $\ell \simeq 1 \text{ m}$ .

b) Na jedan elektron će delovati sila intenziteta

$$F_1 = evB . \quad (2)$$

Označimo sa  $N_A$  Avogadrov broj. Tada na  $N$  slobodnih elektrona u žici deluje sila

$$F_N = evB m \frac{N_A}{M} , \quad (3)$$

ako približno uzmemo da postoji jedan slobodan elektron po atomu bakra. Kako je za bakar molska masa  $M = 63,57 \text{ kg/kmol}$ , biće

$$F_N \simeq 0,8 \text{ N}. \quad (4)$$

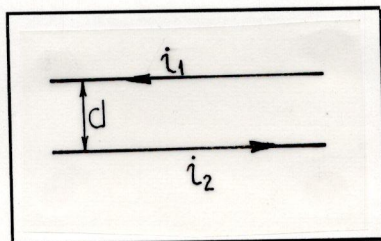
Vrlo približno, ova je sila takodje jednaka jedan njutn.

Pitanja i komentari

To da smo dobili  $F_N \simeq F = 1 \text{ N}$ , naravno, nije slučajno. Sila  $i(\vec{\ell} \times \vec{B})$  (kako se često zove: Amperova sila) i jeste rezultat delovanja Lorencove sile na driftne elektrone u metalu. Drugo je pitanje, poznato u diskusijama o magnetizmu već više od sto godina na koji način se, na mikroskopskom nivou, Lorencova sila transponuje u ponderomotornu silu na provodnik kao celinu. Danas se uzima da Lorencova sila komunicira sa rešetkom posredstvom Holovog električnog polja (videti u udžbeniku paragraf §150), ali i preko sile elektron-jon u rešetki. Šire o ovom videti u članku *W. R. McKinnon, S. P. McAlister, and C. M. Hurd Origin of the force on a current-carrying wire in a magnetic field, Am. J. Phys., Sept. 1980.*

15.

Dva prava, veoma dugačka, tanka provodnika postavljena su paralelno jedan drugom, na rastojanju  $d$ . Kroz prvi protiče struja  $i_1$ , kroz drugi  $i_2$ , ali u suprotnom smeru (Slika 15). a) Kojom silom po jedinici dužine interaguju provodnici? Kolika je sila na dužini  $\ell$ ? b) Izračunati silu ako je  $d = 2 \text{ m}$ ,  $i_1 = i_2 = 10^4 \text{ A}$  i  $\ell = 10 \text{ cm}$ .



Slika 15

Rešenje

a) Da bismo našli traženu silu treba znati magnetsku indukciju  $\vec{B}$  koju na mestu drugog provodnika stvara prvi provodnik. U zadatku 1 smo razjasnili tu situaciju, pa znamo ako struja teče duž  $z$  ose da će biti

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \vec{e}_\varphi. \quad (1)$$



S obzirom na dati smer struje  $i_1$ , indukcija je usmerena od crteža prema posmatraču što je naznačeno pomoću orta  $\vec{e}_\varphi$ . Sada nalazimo silu koja deluje na dužini  $\ell$  drugog provodnika

$$\vec{F} = i_2 \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \vec{\ell} \times \vec{e}_\varphi. \quad (2)$$

Radi se o sili odbijanja izmedju dva provodnika. Njen intenzitet je

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{\ell}{d}, \quad (3)$$

tj. po jedinici dužine deluje sila

$$F_\ell = \frac{\mu_0}{2\pi d} i_1 i_2. \quad (4)$$

b) Zamena datih brojnih vrednosti daje

$$F = 1 \text{ N}. \quad (5)$$

#### Pitanja i komentari

Potrebno je primetiti sledeće. Izraz za silu kojom interaguju dva paralelna strujna elementa nama je poznat (videti u Uvodu tačku 5). Stavljajući tamo  $r_{12} = d$  i  $d\ell_1 = d\ell_2 \simeq \ell$ , što izgleda prihvatljivo budući da je  $\ell \ll d$ , stižemo do izraza za silu u obliku

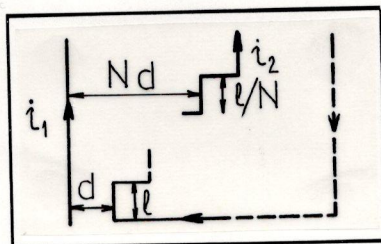
$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{\ell^2}{d^2}. \quad (6)$$

Ali očito, rezultati (3) i (6) se ne podudaraju. U čemu grešimo kad izvodimo formulu (6)?

Pokažite da važi treći Njutnov zakon za provodnike sa Slike 15. Razmestite strujne duži tako da zakon akcije i reakcije prividno ne važi. Kako se to objašnjava?

#### 16.

a) Kojom silom  $F$  privlači pravi, beskonačni, tanki provodnik stepeničasti provodnik sa Slike 16a? Visina  $N$ -tog stepenika je  $\ell/N$  a udaljen je od pravog provodnika na distancu  $Nd$ . b) Izračunati silu  $F$  ako je  $i_1 = i_2 = 1\text{A}$ ,  $\ell = 10\text{ cm}$  i  $d = 1\text{ cm}$ .



Slika 16a

## Rešenje

a) Prema rešenju zadatka 15, paralelni strujni segment dužine  $\ell/N$ , na udaljenosti  $Nd$  od beskonačnog provodnika "oseća" silu privlačenja

$$F_N = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{\ell/N}{Nd}, \quad (1)$$

odnosno,

$$F_N = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{\ell}{d} \frac{1}{N^2}. \quad (2)$$

Ukupna sila na izlomljeni strujni provodnik sa beskonačno mnogo stepenika je

$$F = \sum_{N=1}^{\infty} F_N \quad (3)$$

što posle kombinovanja sa izrazom (2) postaje

$$F = F_0 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \quad (4)$$

gde smo uveli oznaku

$$F_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{\ell}{d}. \quad (5)$$

Poznato je da zbir kvadrata recipročnih vrednosti svih prirodnih brojeva iznosi  $\pi^2/6$ . Prema tome će biti

$$F = \frac{\pi^2}{6} F_0. \quad (6)$$

Numerički faktor u ovom izrazu ima vrednost 1,64493.

b) Sada ćemo izračunati brojnu vrednost privlačne sile

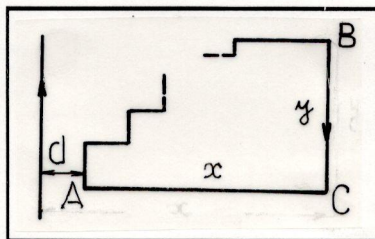
$$F = \frac{\pi^2}{3} \mu N. \quad (7)$$

Numerički faktor  $\pi^2/3$  ima približnu vrednost 3,2899.

## Pitanja i komentari

Pokažite da horizontalni segmenti ne doprinose sili privlačenja. Pokažite da je ukupna dužina vertikalnih segmenata beskonačna. Bez obzira na to, ukupna sila privlačenja je konačna. Komentarišite ulogu povratnih provodnika.

Kolika se greška čini ako se posmatra samo prvih 20 vertikalnih segmenata? (Odgovor: približno 3%). U toj aproksimaciji odredite silu na zatvoreno strujno kolo sa Slike 16b.

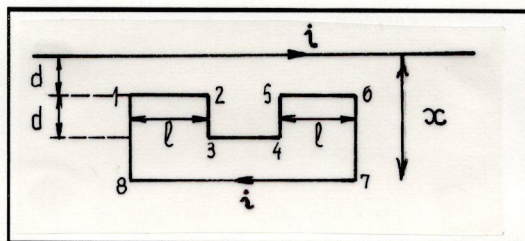


Slika 16b

Uputstvo:  $x = 20d$ ;  $y = \ell \sum_{N=1}^{N=20} 1/N$ ; deo AB doprinosi privlačenju konture, a deo BC odbijanju; ukupna sila je privlačna, što se vidi i bez izračunavanja.

## 17.

U blizini pravog, beskonačnog i tankog provodnika kojim teče struja jačine  $i$  nalazi se kontura kojom teče struja iste jačine (Slika 17). Ceo sistem je u jednoj ravni, a strujni segmenti konture su ili paralelni sa provodnikom ili su upravni na njemu. a) Naći silu  $F$  kojom provodnik deluje na konturu. b) Izračunati silu  $F$  ako je  $i = 10$  A,  $\ell = 10$  cm,  $d = 1$  cm, i  $x = 3d$ .



Slika 17

## Rešenje

a) Ukupnu silu naći ćemo kao zbir sila na pojedine segmente strujne konture

$$F = F_{12} + F_{34} + F_{56} - F_{78} . \quad (1)$$

Svaku od ovih sila posebno, moguće je naći imajući u vidu jednačinu (3) zadatka 15. Uvedimo jednu oznaku, radi kraćeg pisanja:

$$F_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} i^2 \frac{\ell}{d} . \quad (2)$$

Sada lako nalazimo sledeće odnose:

$$F_{12} = F_{56} = F_0 , \quad F_{34} = \frac{1}{2} F_0 , \quad F_{78} = 3 \frac{d}{x} F_0 . \quad (3a, b, c)$$

Odavde odmah dobijamo

$$F = F_0 \left( \frac{5}{2} - 3 \frac{d}{x} \right) . \quad (4)$$

b) Izračunajmo najpre silu  $F_0$ . Zamena brojnih vrednosti daje  $F_0 = 2 \cdot 10^{-4}$  N. Prema jednačini (4) sada će biti

$$F = 3 \cdot 10^{-4} \text{ N} . \quad (5)$$

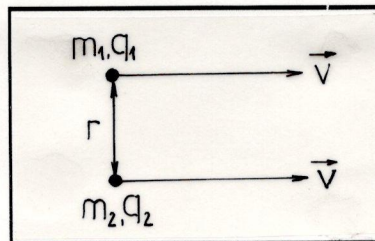
## Pitanja i komentari

Vertikalni segmenti: 8-1, 2-3 itd. ne utiču na silu. Zašto? Kada je  $x > 2d$  očito je  $F > 0$  (privlačenje konture). Gde treba da je lociran povratni provodnik 7-8 da bi sila nestala? (Odgovor:  $x_{01} = 6d/5$ .)

Pozabavite se jednom generalizacijom. Neka postoji  $2k + 1$  isturena segmenta, na rastojanju  $2d$  od provodnika. Tada možemo izračunati da će sila biti anulirana ako je povratni provodnik na rastojanju  $x_{0k} = 2d(4k + 3)/(6k + 5)$ . Ako  $k \rightarrow \infty$  tada  $x_{0\infty} = 4d/3$ . Kako da ovaj rezultat logički opravdamo? (Odgovor: U stvari, za  $k \rightarrow \infty$ , Slika 17 se svodi na segment dužine  $\ell/2$  na rastojanju  $d$ , više segment iste dužine na rastojanju  $2d$ , više povratni provodnik dužine  $\ell$  lociran negde izmedju. Tako se odmah dobija rezultat za dužinu  $x_{0\infty}$ .)

## 18.

Prva čestica mase  $m_1$  i naelektrisanja  $q_1$  kreće se brzinom  $v$ . U istom pravcu i smeru, brzinom istog intenziteta  $v$ , kreće se i druga čestica mase  $m_2$ , naelektrisanja  $q_2$  (videti Sliku 18a). Na jednu od čestica, bilo koju, deluje kako magnetska, tako i električna sila. Naći odnos te dve sile.



Slika 18a

## Rešenje

Polazeći od formule za magnetsku indukciju pokretne čestice možemo naći intenzitet magnetske indukcije  $B_{12}$  koju prva čestica stvara na mestu druge čestice

$$B_{12} = \frac{\mu_0 q_1}{4\pi r^2} v. \quad (1)$$

Magnetska sila na drugu česticu će, na osnovu  $F_B = q_2 v B_{12}$ , iznositi

$$F_B = \frac{\mu_0}{4\pi} q_2 v^2 \frac{q_1}{r^2}. \quad (2)$$

Ova sila za koju znamo da je privlačna (ako pogledamo naš zadatak 15) može se prikazati u obliku

$$F_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{v^2}{c_0^2}, \quad (3)$$

budući da je  $c_0^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$ , gde su  $\epsilon_0$  i  $\mu_0$  električna i magnetska konstanta, respektivno. Na drugoj strani relacije (3) prepoznamo deo izraza koji se poklapa sa Kulonovom silom  $F_E$  između ove dve čestice:

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (4)$$

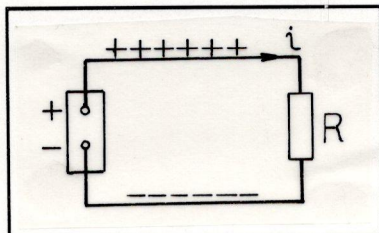
Prema tome za traženi količnik  $F_B/F_E$  odmah nalazimo

$$\frac{F_B}{F_E} = \left(\frac{v}{c_0}\right)^2. \quad (5)$$

Za nerelativističke brzine kretanja, magnetska sila je mnogo manja od električne sile, onoliko koliko je i kvadrat relativističkog faktora  $\beta = v/c_0$  manji od jedinice.

Pitanja i komentari

Posmatrajmo dva prava, duga, paralelna provodnika zanemarljive otpornosti koji su sa jednog kraja priključeni na izvor struje a s drugog kraja je spojen potrošač otpornosti  $R$  (videti Sliku 18b).



Slika 18b

Gornji provodnik nosi izvestan višak pozitivnog elektriciteta. Obeležimo linijsku gustinu naelektrisanja sa  $q_\ell$ . Kolom teče struja jačine  $i$ . Provodnici se privlače električnom silom  $F_E$  a odbijaju magnetskom silom  $F_B$ . Možemo li u ovom slučaju odrediti odnos  $F_B/F_E$ ? Podjimo od relacije (5). Umesto brzine  $v$  treba uzeti srednju usmerenu brzinu kretanja nosilaca elektriciteta, tzv. driftnu brzinu  $u$ . Pošto je  $i = q_1 n u S$  i  $q_\ell = n S q_1$  ( $q_1$  je naelektrisanje jedne čestice,  $n$  je koncentracija čestica a  $S$  površina poprečnog preseka provodnika) biće  $u = i/q_\ell$ . Na taj način relaciju (5) transformisaćemo u oblik

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{1}{c_0^2} \frac{i^2}{q_\ell^2}. \quad (6)$$

Zavisno od jačine struje, tj. od otpornosti tela, količnik sila može biti kako manji tako i veći od jedinice. Znači, rezultanta sila ne mora obavezno biti odbojna, kako se inače često prihvata u raznim udžbenicima.

Pokažite da se izraz (6) može svesti na oblik

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \left( \frac{\ln \xi}{\pi R} \right)^2, \quad (7)$$

gde je  $\xi = d/\ell$  ( $d$  je poluprečnik poprečnog preseka, a  $\ell$  rastojanje izmedju provodnika). Dakle, mora biti  $R \ll (\ln \xi / \pi) \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$  da bi bilo legitimno zanemariti električnu silu.

Zanimljivo je da rezultat (5) ostaje na snazi i u relativističkom slučaju. Pri velikim brzinama, oko čestice  $q_1$  formira se električno polje (videti u

udžbeniku paragraf §143).

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{r^2(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (8)$$

gde je, za naša razmatranja,  $\theta = \pi/2$ . Pri tom je još magnetska indukcija  $B = vE/c_0^2$ . Sada možemo naći električni deo sile

$$F_E = q_2 E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2 \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (9)$$

kao i magnetski deo

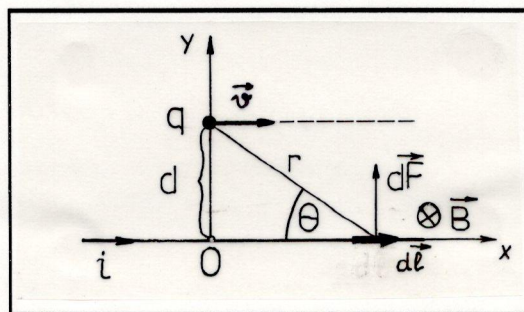
$$F_B = q_2 v B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v^2}{r^2 \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10)$$

Dakle, i u relativističkom slučaju je

$$\frac{F_B}{F_E} = \beta^2 = \left(\frac{v}{c_0}\right)^2. \quad (11)$$

## 19.

Pozitivno naelektrisanje  $q$  kreće se paralelno pravom beskonačno dugom provodniku sa strujom (Slika 19) na rastojanju  $d$ . Brzina čestice je  $v$  a jačina struje  $i$ . a) Kojom silom  $F$  pokretno naelektrisanje privlači provodnik sa strujom? b) Izračunati silu  $F$  ako je  $i = 10^6$  A,  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $v = 10^7$  m/s i  $d = 1$  mm.



Slika 19

## Rešenje

a) Poslužimo se koordinatnim sistemom sa Slike 19 i oznakama koje su tamo naznačene. U momentu kada izračunavamo silu, naelektrisanje je u tački  $(0, d)$ . Ono tada proizvodi u tački  $(x, 0)$  magnetsko polje indukcije

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \theta}{r^2} \vec{e}_z. \quad (1)$$

Pošto je  $r^2 = x^2 + d^2$  i  $\sin \theta = d/r$  izraz za magnetsku indukciju se svodi na

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv d}{(x^2 + d^2)^{3/2}} \vec{e}_z. \quad (2)$$

Na strujni elemenat  $id\vec{l}$  deluje sila  $d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}$ , tj.

$$d\vec{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv id dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}} \vec{e}_x \times \vec{e}_z. \quad (3)$$

Uzimajući u obzir da je  $\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$ , nalazimo

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv id dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}} \vec{e}_y. \quad (4)$$

Sila je privlačna i usmerena duž pozitivnog smera  $y$  ose. Intenzitet ukupne sile će biti

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} qv id \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

Javio se integral koji je tablični

$$\int \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{1}{d^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}, \quad d \neq 0. \quad (6)$$

U beskonačnim granicama vrednost mu je  $2/d^2$ , odakle definitivno dobijamo

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{qvi}{d}. \quad (7)$$

Naelektrisanje  $q$  javlja se na prvom stepenu; negativna čestica bi odbijala provodnik.



b) Izračunajmo sada brojnu vrednost za silu

$$F = 3,2 \cdot 10^{-10} \text{ N} . \quad (8)$$

Sila je nešto manja od milijarditog dela njutna.

**Pitanja i komentari**

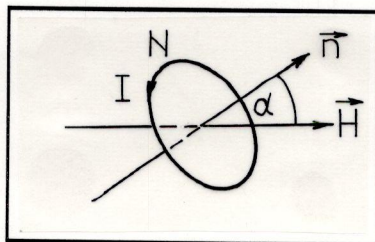
Ako izraz za silu (7) napišemo u obliku

$$F = qv \frac{\mu_0 i}{2\pi d} , \quad (9)$$

vidimo da je to Lorencova sila na naelektrisanje  $q$  koje se kreće brzinom  $v$  u magnetskom polju jačine  $i/2\pi d$ . Iz jednog ranijeg zadatka (zadatak 1) znamo da je to polje pravog beskonačnog provodnika. Znači, zadatak smo mogli i lakše da rešimo, u jednom redu, uzimajući u obzir treći Njutnov zakon i nama već poznate formule.

**20.**

Ravni kalem poluprečnika  $R$  ima  $N$  navoja. Osa kalema je u ravni magnetskog meridijana, pod uglom  $\alpha$  prema pravcu magnetskog polja (videti Sliku 20). Kroz kalem teče struja jačine  $I$ . a) Odrediti moment sile  $M$  kojem je izložen kalem, ako znamo da je jačina magnetskog polja Zemlje na mestu kalema  $H = 40 \text{ A/m}$ . b) Izračunati veličinu  $M$  ako je  $N = 500$  navoja,  $I = 2 \text{ A}$ ,  $R = \sqrt{5} \text{ cm}$  i  $\alpha = 45^\circ$ .



Slika 20

**Rešenje**

a) Kalem tretiramo kao ravnu strujnu konturu u magnetskom polju; ona ima magnetski moment

$$\vec{p}_m = NI \vec{S} , \quad (1)$$

gde je  $|\vec{S}|$  površina poprečnog preseka kalema ( $|\vec{S}| = \pi R^2$ ). Moment sile koja deluje na kalem izračunava se na poznati način

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} , \quad (2)$$

gde je  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  magnetska indukcija Zemljinog magnetskog polja. Intenzitet momenta sile je

$$M = p_m B \sin \alpha . \quad (3)$$

Smenom izraza (1) u izraz (3) dobijamo

$$M = \mu_0 N I \pi R^2 H \sin \alpha . \quad (4)$$

Moment sile teži da postavi kalem u takav položaj da je  $\vec{n} \parallel \vec{H}$ .

b) Izračunajmo obrtni moment prema relaciji (4). Dobijamo

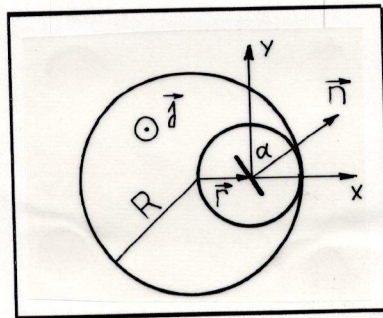
$$M \simeq 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ Nm} . \quad (5)$$

### Pitanja i komentari

Momenti sile reda veličine  $10^{-5}$  Nm su mali (kao učinak sile od milionitog dela jednog njutna na kraku od desetak centimetara). Ipak, mogu se sasvim pouzdano meriti. Kako bi mogla, u osnovnom, izgledati merna šema sa torzionom vagom?

## 21.

U cilindričnom provodniku postoji koaksijalna cilindrična šupljina poluprečnika  $r = R/2$  gde je  $R$  poluprečnik provodnika (videti Sliku 21). Duž cilindra teče struja konstantne gustine  $j$ . U šupljini je kalem, postavljen tako da normala na njegovu ravan leži u horizontalnoj  $xOy$  ravni i zaklapa ugao  $\alpha$  prema  $y$  osi. Kalem se sastoji od  $N$  navoja izolovane žice savijene u vidu kvadrata stranice  $\ell$ . Kalemom teče struja jačine  $i$ . Kalem se može okretati oko vertikalne,  $z$  ose. a) Naći moment sprega  $M$  koji deluje na kalem. b) Izračunati brojnu vrednost za  $M$  ako je  $i = 4$  A,  $N = 200$  navoja,  $\ell = 1$  cm,  $j = 10$  A/cm<sup>2</sup>,  $r = 5$  cm i  $\alpha = 60^\circ$ .



Slika 21

## Rešenje

a) Magnetsko polje u cilindričnoj šupljini opisanog tipa analiziraćemo u zadatku 36. Tamo je pokazano da je polje homogeno i da iznosi

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{j} \times \vec{r}. \quad (1)$$

Na ravnu strujnu konturu u homogenom magnetskom polju deluje spreg sila

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (2)$$

Magnetski momenat strujne konture, tj. opisanog kalema, iznosi

$$\vec{p}_m = NiS\vec{n}, \quad (3)$$

gde je  $S = \ell^2$  površina kalema, a  $\vec{n}$  normala te površine. Prema tome,

$$\vec{M} = Ni\ell^2 \vec{n} \times \vec{B}. \quad (4)$$

Vektorski proizvod koji se ovde javio ima vrednost  $B \sin \alpha \vec{e}_z$  jer je

$$\vec{n} \times \vec{B} = B \cos \alpha \vec{e}_y \times \vec{e}_y + B \sin \alpha \vec{e}_x \times \vec{e}_y. \quad (5)$$

Ovde su  $\vec{e}_y$  i  $\vec{e}_z$  ortovi odgovarajućih osa. Tako nalazimo

$$\vec{M} = Ni\ell^2 B \sin \alpha \vec{e}_z. \quad (6)$$

Dakle, spreg je usmeren duž  $z$  ose i ima intenzitet

$$M = \frac{1}{2}\mu_0 Ni\ell^2 jr \sin \alpha. \quad (7)$$

Spreg teži da postavi ravan kalema u  $xOz$  ravan, da se pozitivna normala  $\vec{n}$  usmeri duž  $+y$  ose.

b) Izračunajmo intenzitet sprega, polazeći od rezultata (7) :

$$M = 4\pi\sqrt{3} 10^{-9} \text{ A}^2 \text{H} \simeq 2,2 10^{-8} \text{ Nm}. \quad (8)$$

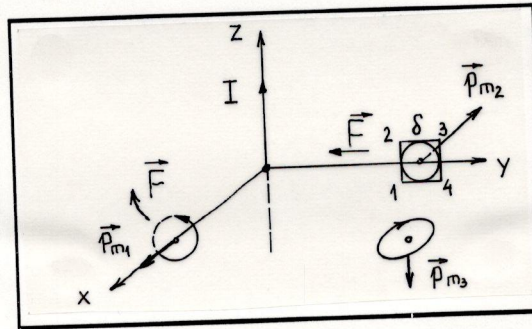
## Pitanja i komentari

Korisno je da se analizom jedinica uverite da je zaista  $\text{amper}^2 \times \text{henri} = \text{njutn} \times \text{metar}$  u relaciji (8).

Da li ima potrebe da se modifikuje rezultat zadatka kad bi se zahtevalo da kalem može rotirati oko jedne svoje stranice paralelne  $z$  osi?

## 22.

Struja jačine  $I$  teče pravim provodnikom u pozitivnom smeru  $z$  ose (Slika 22). Tri elementarne strujne konture locirane su u tačkama  $(r, 0, 0)$ ,  $(0, r, 0)$  i  $(r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2}, 0)$ . Magnetski momenti su im, redom,  $\vec{p}_{m1} = p_{m1} \vec{e}_x$ ,  $\vec{p}_{m2} = -p_{m2} \vec{e}_x$  i  $\vec{p}_{m3} = -p_{m3} \vec{e}_z$  a) Odrediti sile  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$  koje deluju na pomenute strujne konture. b) Izračunati silu  $\vec{F}_1$  ako je površina konture  $S = 1 \text{ cm}^2$ , jačina njene struje  $i = 1 \text{ A}$ ,  $I = 25 \text{ A}$  i  $r = 5 \text{ cm}$ .



Slika 22

## Rešenje

a) U Uvodu smo naveli (videti formulu (13a)) izraz za izračunavanje sile u nehomogenom magnetskom polju. Za konturu na  $x$ -osi, taj izraz se svodi na oblik

$$\vec{F}_1 = p_{m1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \quad (1)$$

Vidimo da priraštaj vektora  $\vec{B}$  u pravcu vektora  $\vec{p}_{m1}$  određuje pravac i smer sile. Magnetske indukcije u tačkama  $x_- = r - \varepsilon$  i  $x_+ = r + \varepsilon$  imaju isti pravac i smer, ali je polje slabije ispred konture, u tački  $x_+$ . Otuda neposredno sledi da će sila imati negativan smer  $y$  ose, tj. biće  $\vec{F}_1 = -F_1 \vec{e}_y$ . Moduo sile naći ćemo imajući u vidu strukturu polja oko pravog provodnika (videti zadatak 1)

$$F_1 = p_{m1} \left| \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{x=r} = p_{m1} \left| \frac{d}{dx} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right|_{x=r} \quad (2)$$

odnosno,

$$F_1 = p_{m1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}, \quad (3)$$

pa za silu  $\vec{F}_1$  u vektorskom obliku imamo

$$\vec{F}_1 = -p_{m1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \vec{e}_y \quad (4)$$

Intenzitet sile  $F_2$  izračunaćemo direktnom primenom obrasca za silu  $\vec{F} = I \oint d\vec{\ell} \times \vec{B}$ , koji sledi iz definicione formule za magnetsku indukciju; integriše se po datoj strujnoj konturi. Uprošćenja radi, konturu smo predstavili u vidu pravougaonika stranica  $d$  i  $\delta$ . Sili doprinose stranice 1 – 2 i 3 – 4, dužine  $d$ , i to prva komponentom

$$F_{12} = id \frac{\mu_0 I}{2\pi(r - \delta/2)}, \quad (5)$$

i na sličan način druga

$$F_{34} = id \frac{\mu_0 I}{2\pi(r + \delta/2)}. \quad (6)$$

Rezultatna sila usmerena je prema provodniku i iznosi

$$F_2 = F_{12} - F_{34}, \quad (7)$$

što posle aproksimacije  $r \gg \delta/2$  u izrazima (5) i (6) daje

$$F_2 \simeq \frac{\mu_0 i I d}{2\pi r} \left( 1 + \frac{\delta}{2r} - 1 + \frac{\delta}{2r} \right), \quad (8)$$

odnosno,

$$F_2 = \frac{\mu_0 I p_{m2}}{2\pi r^2}. \quad (9)$$

Sile koje napadaju stranice 2 – 3 i 4 – 1 ne doprinose ukupnoj sili (odredite samo smerove tih sila i uverite se da je to tako za nedeformabilnu konturu). Definitivno je

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_0 I p_{m2}}{2\pi r^2} \vec{e}_y. \quad (10)$$

Primena obrasca (13a) iz Uvoda na treću konturu pokazuje da tamo nema nenulte komponente sile. Naime, magnetski moment ima  $z$ -komponentu jedino, ali ne postoji gradijent polja u tom pravcu za našu idealizovanu strukturu. Na taj je način

$$\vec{F}_3 = 0. \quad (11)$$

b) Izračunavanje intenziteta sile  $F_1$  daje  $F_1 = 2 \cdot 10^{-7}$  N.

#### Pitanja i komentari

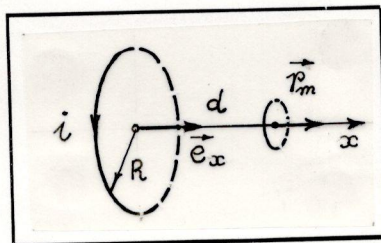
Podjite od rada sile polja izraženog preko priraštaja fluksa,  $\delta A = id\Phi$  pa pokažite da je, zaista,  $F_3 = 0$ . Polazeći od toga da su sile usmerene tamo

kuda bi pri virtuelnom pomeranju došlo do porasta fluksa, pokažite da je taj argument u skladu sa nadjenim smerovima sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ .

Gradijent magnetskog polja, vidimo, bitan je za nastanak sila o kojima je ovde reč. Pokažite da se u našem zadatku radi o gradijentima reda veličine  $2 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2$ . Da li se takvi gradijenti magnetskog polja teško mere? (Napomena: Savremeni superprovodni gradientometri imaju prag osetljivosti oko  $10^{-7} \text{ A/m}^2$ .)

## 23.

Po ravnoj kružnoj konturi poluprečnika  $R$  teče struja jačine  $i$ . Na osi konture (osa  $x$  na Slici 23a) nalazi se elementarna kontura magnetskog momenta  $\vec{p}_m = p_m \vec{e}_x$ , u tački koja je na rastojanju  $d$  od konture. a) Naći silu koja deluje na elementarnu strujnu konturu. b) Izračunati silu ako je  $p_m = 10^{-2} \text{ Am}^2$ ,  $i = 95,5 \mu\text{A}$ ,  $R = 3 \text{ m}$  i  $d = 4 \text{ m}$ .



Slika 23a

## Rešenje

a) Uslovi koji su definisani u ovom zadatku omogućavaju da se primeni formula

$$F = p_m \frac{dB}{dx}. \quad (1)$$

Kako indukcija  $B$  zavisi od udaljenosti od navoja sa strujom nama je poznat (videti zadatak 6) izraz za indukciju

$$B = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(\sqrt{R^2 + x^2})^3}. \quad (2)$$

Nadjimo izvod funkcije  $B(x)$  u tački  $x = d$

$$\left( \frac{dB}{dx} \right)_{x=d} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \left( -\frac{3}{2} \right) (R^2 + d^2)^{-5/2} 2d. \quad (3)$$

Apsolutna vrednost sile će biti

$$F = \frac{3}{2} p_m \mu_0 i R^2 d (\sqrt{R^2 + d^2})^{-5}. \quad (4)$$

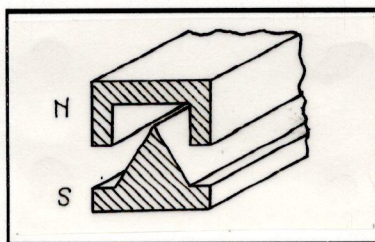
Negativan znak u relaciji (3) govori da je sila usmerena ka kružnom strujnom navoju, u skladu sa poznatim pravilom da sila teži da odvuče elementarnu strujnu konturu u oblast jačeg polja, ako su vektori  $\vec{p}_m$  i  $\vec{B}$  paralelni (istog pravca i smera). Dakle,

$$\vec{F} = -\frac{3}{2} \mu_0 i R^2 d \left( \sqrt{R^2 + d^2} \right)^{-5} \vec{p}_m. \quad (5)$$

b) Zamena datih brojnih vrednosti daje  $F \simeq 20 \text{ fN}$

#### Pitanja i komentari

Naša strujna kontura daje nehomogena polja sa gradijentom koji iznosi desetak ampera po metru kvadratnom (proverite). Eksperimenti iz raznih oblasti fizike ponekad zahtevaju generisanje gradijenata koji su znatno veći. Klasičan primer je čuveni Štern–Gerlahov eksperiment. Autori su koristili veoma nehomogeno magnetsko polje, proizvedeno pomoću specijalnih profila, kao što je onaj prikazan na Slici 23b.

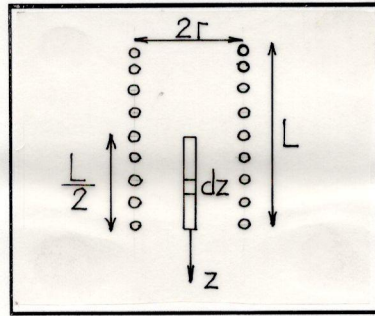


Slika 23b

U takvim mašinama moglo se računati i na vrednosti  $|\partial H/\partial x| \sim 10^8 \text{ A/m}^2$  neposredno nad šiljkom. Sila data izrazom (1) je onda tolika da izaziva primetno vertikalno ubrzavanje atoma i, u krajnjoj liniji, željeni efekat cepanja snopova zbog prostorne orijentacije atomskih magnetskih momenata.

## 24.

Dat je dugi, pravi solenoid kroz koji protiče struja podužne gustine  $j_\ell$ . Dužina solenoida je  $L$ , a poluprečnik  $r$ . Solenoid je postavljen vertikalno (Slika 24). Tanki aluminijumski štاپ dužine  $L/2$  površine poprečnog preseka  $S$  stoji tačno po osi  $z$ . U ravnoteži, gornji kraj štapa seže tačno do centra solenoida. a) Kolika linijska gustina struje obezbeđuje ostvarenje tog uslova? b) Izračunati  $j_\ell$  ako je  $L = 50 \text{ cm}$ .



Slika 24

## Rešenje

a) Na element štapa  $dz$  deluje sila

$$dF = dp_m \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (1)$$

kao što smo objasnili u zadatku 23. Magnetski moment elementa nalazimo po definiciji magnećenja supstancije

$$dp_m = Id\tau = ISdz. \quad (2)$$

Pošto je za paramagnetike  $I = \kappa H$ , a istovremeno imamo  $B = \mu\mu_0 H$  biće:

$$dp_m = \frac{\kappa}{\mu\mu_0} BS dz. \quad (3)$$

Na taj način dobijamo

$$dF = \frac{\mu - 1}{\mu\mu_0} BS dB, \quad (4)$$

gde smo još uzeli u obzir vezu  $\kappa = \mu - 1$ . Ukupnu silu koja deluje na paramagnetski aluminijumski štapa nalazimo sada integracijom

$$F = \frac{\mu - 1}{\mu\mu_0} S \int_{B_0}^{B_{1/2}} B dB. \quad (5)$$

Ovde je  $B_0$  magnetska indukcija u centralnom delu solenoida, a  $B_{1/2}$  indukcija na njegovom kraju (za  $z = L/2$ ). Napomenimo uzgred da je nama već poznato (iz zadatka 13) da je  $B_{1/2} = B_0/2$ . Iz relacije (5) odmah nalazimo apsolutnu vrednost intenziteta sile

$$|F| = \frac{\mu - 1}{2\mu\mu_0} S (B_0^2 - B_{1/2}^2). \quad (6)$$



Smer sile je odozdo naviše, teži da uvuče štap u solenoid (to je jasno iz analize u zadatka 23). S druge strane, težina štapa je

$$G = mg = \rho g S \frac{L}{2}, \quad (7)$$

gde je  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$  gustina aluminijuma. Uslov ravnoteže štapa, da je magnetska sila jednaka težini štapa, dovodi do

$$\frac{3\mu - 1}{8 \cdot 4\mu\mu_0} B_0^2 = \rho g \frac{L}{2}. \quad (8)$$

Kako je  $B_0 = \mu\mu_0 H_0$  i  $H_0 = j_\ell$ , odavde dobijamo definitivno

$$j_\ell = \sqrt{\frac{4}{3\mu\mu_0(\mu - 1)}} \rho g L. \quad (9)$$

b) Iz tablica možemo naći da je magnetski permeabilitet aluminijuma  $\mu = 1,000023$ , pa zamena brojnih vrednosti daje  $j_\ell \simeq 2,47 \cdot 10^7 \text{ A/m}$ .

#### Pitanja i komentari

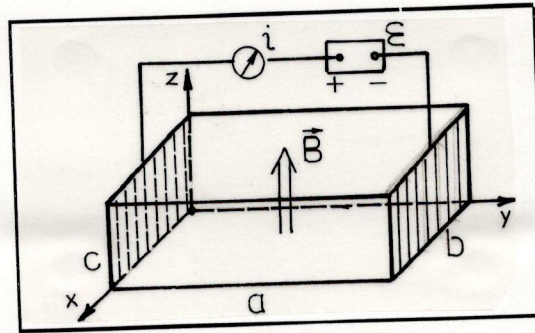
Da li je moguće izvesti analogan eksperiment sa dijamagnetskim štapom? Kako? U našem zadatku, je li bitna pretpostavka usvojeni smer struje u solenoidu?

Jednačina (9) ne zavisi od  $S$  eksplicitno. Je li logično da debljina štapa ne određuje uslov ravnoteže?

Pokušajte da analizirate uravnoteživanje veoma dugog aluminijumskog štapa magnetskom silom solenoida.

#### 25.

U staklenoj posudi pravougaone osnove površine  $S = ab$  usut je elektrolit gustine  $d$  i specifične električne otpornosti  $\rho$ , do visine  $c$  (Slika 25). Šrafrane površine su ravne metalne elektrode prilepljene za staklo i spojene za strujni izvor zanemarljive unutrašnje otpornosti, koji daje struju jačine  $i$  kroz elektrolit. Verikalno homogeno magnetsko polje indukcije  $B$  prožima svu posudu s tečnošću. a) Opišite položaj koji će zauzeti slobodna površina tečnosti. b) Izračunati razliku nivoa ako je  $\rho = 5 \cdot 10^{-2} \Omega\text{m}$ ,  $d = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mathcal{E} = 24 \text{ V}$ ,  $B = 0,417 \text{ T}$ ,  $a = 1 \text{ m}$  i  $b = 50 \text{ cm}$ . (Uzeti približnu vrednost ubrzanja Zemljine teže  $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$ .)



Slika 25

## Rešenje

a) Na strujnu cev dužine  $a$  deluje magnetska sila

$$dF_x = aBdi, \quad (1)$$

a ukupna magnetska sila koja deluje na provodnu tečnost kao celinu je

$$F_x = aiB. \quad (2)$$

Pored ove sile, centar mase tečnosti napada još i gravitaciona sila

$$F_{-z} = mg. \quad (3)$$

Rezultantna sila zaklapa ugao  $\alpha$  sa negativnim smerom  $z$  ose, pri čemu je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_x}{F_{-z}} = \frac{aiB}{mg}. \quad (4)$$

Slobodna površina tečnosti teži da se postavi normalno na pravac rezultantne sile. Zato će njen nivo biti veći na prednjoj strani posude nego na zadnjoj. Pri tom je nagib površine

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta h}{b}, \quad (5)$$

gde je  $\Delta h$  pomenuta razlika nivoa. Izjednačavajući desne strane relacija (4) i (5) nalazimo

$$\Delta h = \frac{aiB}{mg} b. \quad (6)$$

Pošto je  $i = jbc$ , a gustina struje je povezana sa jačinom električnog polja u elektrolitu ( $j = E/\rho$ ), moći ćemo da pišemo

$$i = \frac{bc\mathcal{E}}{a\rho}. \quad (7)$$

Uzmimo još u obzir da je  $m = dabc$ , pa iz jednačine (6) dobijamo

$$\Delta h = \frac{B\mathcal{E}b}{agd\rho}. \quad (8)$$

b) Za date brojne vrednosti izračunavamo:  $\Delta h = 1\text{cm}$ .

Pitanja i komentari

Može li se na osnovu ovog zadatka koncipirati postupak za eksperimentalno određivanje specifične električne provodnosti tečnosti? Koje bi bile prednosti, a koji nedostaci takvog jednog mernog metoda?

Kolika struja teče kolom?

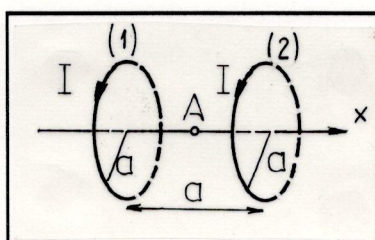


## GLAVA TREĆA

MAGNETSKO POLJE STRUJA U VAKUUMU.  
SLOŽENIJI PRIMERI

## 26.

Dve identične, kružne strujne konture, poluprečnika  $a$ , kroz koje teku struje iste jačine  $I$  (i u istom smeru), postavljene su međusobno paralelno, na rastojanju  $a$ . a) Pokazati da je magnetsko polje oko centra tog sistema (tačka A na Slici 26) u dobroj meri homogeno. b) Izračunati magnetsku indukciju u tački A ako je  $I = 30$  A i  $a = 20$  cm.



Slika 26

## Rešenje

a) U okolini tačke A, na  $x$ -osi, koja prolazi kroz centre kontura, magnetsko polje koje potiče od konture (1) ima jačinu

$$H_1 = \frac{I}{2} \frac{a^2}{\left[ a^2 + (a/2 - x)^2 \right]^{3/2}}. \quad (1)$$

Na sličan način, polje koje potiče od druge konture označene sa (2), imaće jačinu  $H_2$

$$H_2 = \frac{I}{2} \frac{a^2}{\left[ a^2 + (a/2 + x)^2 \right]^{3/2}}. \quad (2)$$

Relacije (1) i (2) neposredno slede iz rešenja zadatka 6.

Pod pretpostavkom da je  $a \gg x$ , razvijmo ove izraze u red i zadržimo samo linearne članove. Dobijamo

$$H_1 \simeq \frac{4\sqrt{5}}{25} \frac{I}{a} \left( 1 + \frac{6x}{5a} \right), \quad (3)$$

$$H_2 \simeq \frac{4\sqrt{5} I}{25 a} \left( 1 - \frac{6 x}{5 a} \right), \quad (4)$$

Ukupnu jačinu magnetskog polja nalazimo po principu superpozicije

$$H = H_1 + H_2 \simeq \frac{8\sqrt{5} I}{25 a}. \quad (5)$$

Vidimo da magnetska indukcija  $B = \mu_0 H$  u centru sistema približno iznosi

$$B = \frac{16\sqrt{5}}{25} \frac{\mu_0 I}{D}, \quad (6)$$

gde je  $D = 2a$  prečnik kružne konture. Dakle,  $B$  skoro ne zavisi od koordinate  $x$ . Magnetsko polje je približno homogeno, što je i trebalo pokazati. Kao što se sećamo,  $\mu_0 I/D$  je magnetska indukcija u centru kružne strujne konture (videti zadatak 5).

b) Za date vrednosti struje i poluprečnika, izračunavamo  $B \simeq 1,35 \cdot 10^{-4} \text{T}$ .

#### Pitanja i komentari

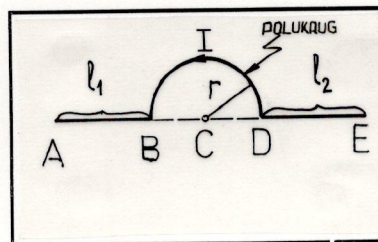
Ideja koja je opisana u ovom zadatku koristi se kod tzv. *Helmholcovih kalemova* pomoću kojih se u laboratorijama dobijaju dovoljno jaka i vrlo homogena magnetska polja u relativno velikim, pritom i pristupačnim, zapreminama, što je neophodno za uspešne eksperimente u mnogim oblastima fizike. Čitalac može lako pokazati da je u predloženoj geometriji sa Slike 26

$$\frac{dB}{dx} = \frac{d^2B}{dx^2} = 0, \quad (7)$$

u centralnoj tački A. Naravno, jasno je da se u Helmholtcovim kalemovima koriste kalemovi sa mnogo navoja, umesto idealizovane jednonavojne strujne konture koju smo mi ovde razmatrali. U samoj stvari to ne menja suštinu analize; u formuli (6) valjalo bi, umesto struje  $I$ , pisati faktor  $NI$ , gde je  $N$  broj navoja jednog od Helmholtcovih kalemova.

#### 27.

Kroz tanki provodnik, čiji je oblik prikazan na Slici 27, teče struja jačine  $I$  u naznačenom smeru. a) Odrediti magnetsku indukciju u tački C. b) Izračunati moduo magnetske indukcije na tom mestu ako je  $I = 1 \text{A}$  i  $r = 1 \text{cm}$ .



Slika 27

## Rešenje

a) Primenimo princip superpozicije. Tražena indukcija  $B$  data je zbirom tri člana

$$B = B_1 + B_2 + B_3. \quad (1)$$

Kontribucija dela BA provodnika, dužine  $l_1$ , izražena je kroz komponentu  $B_1$ . Drugo pravo parče ED, dužine  $l_2$ , daje indukciju  $B_3$ , dok  $B_2$  opisuje uticaj polukružnog dela provodnika. Prema rezultatu zadatka 1 odmah zaključujemo da mora biti  $B_1 = B_3 = 0$  (duž ne može generisati magnetsko polje na tačkama prave kojoj i sama pripada). Takodje lako zaključujemo da je  $2B_2 = B_{\odot}$ , gde je  $B_{\odot}$  magnetska indukcija u centru kružne strujne konture (tu veličinu smo odredjivali u zadatku 5). Prema tome, moduo magnetske indukcije u tački C ima vrednost

$$B = \frac{\mu_0 I}{4r}. \quad (2)$$

Po pravilu desnog zavrtnja, lako vidimo da je vektor  $\vec{B}$  normalan na ravan crteža, usmeren od tačke C prema posmatraču.

b) Zamenom datih vrednosti nalazimo  $B = \pi 10^{-5} \text{ T}$ . Vidimo da je magnetska indukcija približno jednaka trećini gaussa. Uporedjenja radi, setimo se da je horizontalna komponenta Zemljinog magnetskog polja približno pola gaussa.

## Pitanja i komentari

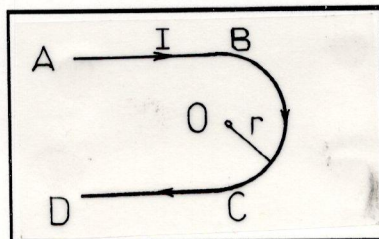
Vidimo da rezultat ne zavisi od dužina  $l_1$  i  $l_2$ . Uzmimo da je  $l_1 = l_2 = \ell$ , pa tačke A i E spojimo žicom u vidu kruga poluprečnika  $R = \ell + r$ . Kolika je magnetska indukcija koju u tački C daje takva, zatvorena, strujna kontura? Da li je i dalje rezultat neosetljiv na  $\ell$ ? Polazeći od ove modifikacije, razmatrajte mogućnost eksperimentalne provere formule (2). Definišite uslove koji bi morali biti zadovoljeni u merenju. Očito, strujno kolo se može zatvoriti tako da tačka C bude u konturi, ali i tako da ona bude van konture. Ako se u prvom slučaju izmeri indukcija  $B_+$ , a u drugom  $B_-$ , pokažite da je

$$B = \frac{1}{2}(B_+ - B_-). \quad (3)$$

Odredite jačinu struje  $I$  tako da pomoću opisane konture poništite u tački  $C$  veličinu  $B_z$ , horizontalnu komponentu Zemljine magnetske indukcije.

## 28.

Struja jačine  $I$  teče tankim provodnikom. Provodnik dužine  $L$  je savijen tako da ima  $\cap$  oblik (Slika 28). Sačinjavaju ga dve duži,  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  i polukrug  $BC$ . a) Odrediti magnetsku indukciju  $\vec{B}$  u tački  $O$  (centar polukružnog dela provodnika). b) Izračunati  $B$  ako je  $I = 1 \text{ A}$ ,  $r = 0,1 \text{ m}$  i  $L = 1 \text{ m}$ .



Slika 28

## Rešenje

a) Shodno rezultatu zadatka 1, strujna duž  $\overline{AB}$  daje magnetsku indukciju  $B_{AB}$

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos \alpha_A, \quad (1)$$

gde je  $\alpha_A$  ugao pod kojim se iz tačke  $A$  vidi poluprečnik  $\overline{OB}$ . Na sličan način nalazimo i doprinos strujne duži  $\overline{CD}$

$$B_{CD} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos \alpha_A. \quad (2)$$

Ovde smo automatski uzeli u obzir da je ugao  $\alpha_D$ , pod kojim se iz tačke  $D$  vidi poluprečnik  $\overline{OC}$  jednak  $\alpha_A$ .

Takodje nije teško, ako se ima u vidu rezultat zadatka 5, naći doprinos polukružnog dela provodnika:

$$B_{BC} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2r}. \quad (3)$$

Ukupnu indukciju u tački  $O$  nalazimo primenom principa superpozicije

$$B = B_{AB} + B_{BC} + B_{CD}, \quad (4)$$



pa je

$$B = \frac{2\mu_0 I}{4\pi r} \cos \alpha_A + \frac{\mu_0 I}{4r} \quad (5)$$

Sa slike vidimo da je  $2\overline{AB} + \pi r = L$ , a odavde nalazimo

$$\overline{AB} = \frac{L - \pi r}{2} \quad (6)$$

Ovo omogućava da odredimo ugao  $\alpha_A$

$$\alpha_A = \arctg \left( \frac{L - \pi r}{2r} \right) \quad (7)$$

Možemo, dakle, definitivno da napišemo, kombinujući (5) i (7)

$$B = \frac{\mu_0 I}{4r} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \cos \left[ \arctg \left( \frac{L - \pi r}{2r} \right) \right] \right\} \quad (8)$$

Vektor  $\underline{B}$  je usmeren od posmatrača prema crtežu i normalan je na ravan crteža u tački O.

b) Zamena brojnih vrednosti daje  $B \approx 5 \mu\text{T}$ .

Pitanja i komentari

Pokažite da u granici  $L \rightarrow \infty$  nalazimo

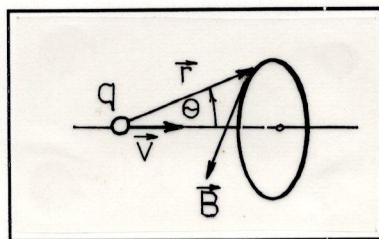
$$B_\infty = \frac{\mu_0 I}{2r} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) \quad (9)$$

Da li se dobija očekivani rezultat i u limesu  $\overline{AB} = \overline{CD} \rightarrow 0$ ? Pomoću transformacija nad funkcijom  $\cos[\arctg(x)]$  upišite izraz (7). (Odgovor:  $B = B_0 [1 + (2/\pi)(1 + \eta^2)^{-1/2}]$ ,  $\eta = 2r/(L - \pi r)$  i  $B_0 = \mu_0 I/4r$ .)

## 29.

Čestica opterećenja  $q$  kreće se pravolinijski konstantnom brzinom  $v$ . Na rastojanju  $r$  od čestice izmerna je maksimalna vrednost magnetske indukcije  $B_m$ . a) Odrediti opterećenje  $q$  smatrajući da su ostale veličine poznate. b) Izračunati vrednost za  $q$  ako je  $B_m = 0,2 \text{ mT}$ ,  $v = 2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$  i  $r = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ .

## Rešenje



Slika 29

a) Magnetska indukcija koja potiče od opterećenja  $q$  koje se kreće brzinom  $v$  izračunava se iz formule

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (1)$$

U datom trenutku, na zadanom rastojanju  $r$  od naelektrisane čestice (Slika 29), maksimalna magnetska indukcija se detektuje za ugao  $\theta = 90^\circ$ , pa je

$$B_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{r^2}. \quad (2)$$

Odavde nalazimo

$$q = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{B_m r^2}{v}. \quad (3)$$

b) Za date brojne vrednosti izračunavamo  $q \simeq 2,5 \cdot 10^{-13}$  C. Dakle, u pitanju je čestica koja nosi otprilike 1 562 500 elementarnih naelektrisanja.

## Pitanja i komentari

Važi li formula (1) za proizvoljne brzine? Treba li uzeti u obzir relativističke efekte za situaciju iz našeg zadatka?

Neka u trenutku  $t = 0$  čestica prolazi kroz koordinatni početak i nastavlja kretanje duž pozitivnog smera  $x$ -ose konstantnom brzinom  $v$ . Skicirajte grafik funkcije  $B(t)$  u tački  $(X, Y)$  za vremenski interval  $(0 < t < \tau)$  gde je  $\tau = 2X/v$ . Treba li, i kada, uzimati u obzir efekte prostiranja elektromagnetskih talasa u sličnim situacijama?

Ako bismo formalno, kao što se to ponekad čini kad su u pitanju studentski zadaci, birali konkretne vrednosti veličina iz formule (3), moglo bi se desiti da budu povredjeni neki fizički principi. Na primer, uzmemo li:  $B_m = 1,6 \cdot 10^{-5}$  T,  $r = 10^{-7}$  m i  $v = 2 \cdot 10^7$  m/s, suočavamo se sa nelogičnošću. Kakvom? (Uputstvo: potrebno je da rezultat zadovoljava uslov  $q/e \geq 1$ ).

## 30.

Shodno klasičnim predstavama, moment količine kretanja elektrona  $\vec{L}$  na nekoj od atomskih orbita, u smislu Borove teorije atoma, precesira u magnetskom polju oko vektora magnetske indukcije  $\vec{B}$ . U knjigama se može naći podatak da je period precesije u polju jačine  $10^3 \text{ Ö}$  oko  $7 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ . Proverite taj rezultat.

## Rešenje

Shodno Larmorovoj teoremi kružna učestanost precesije proporcionalna je magnetskoj indukciji  $B$ , a koeficijent proporcionalnosti zavisi jedino od svojstava elektrona

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{eB}{m} . \quad (1)$$

Uzimajući u obzir da je  $B = \mu_0 H$  i  $T = 2\pi/\Omega$ , za period precesionog kretanja elektrona nalazimo

$$T = \frac{4\pi m}{e\mu_0 H} . \quad (2)$$

Da bismo dobili rezultat u sekundama, neophodno je da vansistemske jedinice *ersted* izrazimo preko odgovarajuće SI jedinice. Napomenuli smo u zadatku 5 da je  $A/m = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Ö}$ . Prema tome, dobijamo  $T \simeq 7 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ .

## Pitanja i komentari

U fizici se zna za više izraza za učestanosti koji su formalno slični Larmorovoj učestanosti, ili se preko ove izražavaju. Pre svega, znamo da slobodni elektron u homogenom magnetskom polju kruži ugaonom učestanošću

$$\omega_c = \frac{eB}{m} , \quad (3)$$

(tzv. *ciklotronska učestanost*). Zatim, poznato je da se u normalnom Zemanovom efektu spektralna linija cepa za iznos

$$\Delta\nu = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{eH}{m} . \quad (4)$$

Za anomalni Zemanov efekat važi

$$\Delta\nu = (m_1 g_1 - m_2 g_2) \nu_0 , \quad (5)$$

gde su  $m_1$  i  $m_2$  magnetski kvantni brojevi,  $g_1$  i  $g_2$  Landeovi faktori i  $\nu_0$  Larmorova frekvencija. Pri proučavanju apsorpcije elektromagnetskog zračenja u supstanciji govori se o *paramagnetskoj elektronskoj rezonanciji* na učestanosti

$$\nu_{per} = \frac{g \mu_B \mu_0 H}{h}, \quad (6)$$

gde je  $h$  Plankova konstanta, a  $\mu_B$  Borov magneton, jednak  $-eh/4\pi m$ . Takodje postoji i tzv. *paramagnetska nuklearna rezonancija* (selektivna apsorpcija elektromagnetskog zračenja u supstanciji) na učestanosti

$$\nu_{pnr} = g \frac{\mu_n H}{h}, \quad (7)$$

gde je  $\mu_n$  nuklearni magneton.

Pokažite da za jačine magnetskih polja  $H \sim 10^{10}$  A/m elektronska rezonancija nastaje pri  $\nu_{per} \sim 1$  GHz (područje centimetarskih talasa). Takodje, pokažite da za polja  $H \sim 10^3$  Ö, učestanosti  $\nu_{pnr}$  leže u oblasti  $10^5$  do  $10^6$  Hz (Uputstvo:  $\mu_B/\mu_n \sim m_n/m \sim 10^4$ ;  $m_n$  je masa jezgra).

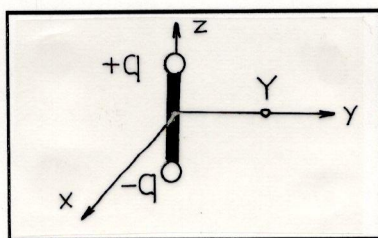
Izvedite numeričku formulu

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 2,8 \cdot 10^{10} B. \quad (8)$$

Rezultat je u *hercima* ako se magnetska indukcija  $B$  izrazi u *teslama*.

### 31.

Električni dipol dipolnog momenta  $p$  postavljen je duž  $z$ -ose (Slika 31). Pozitivno naelektrisanje dipola je u tački  $(0, 0, \ell_+)$  a negativno u tački  $(0, 0, -\ell_-)$ . Dipol rotira oko  $y$ -ose u smeru koji je suprotan kretanju kazaljke na satu ako se gleda iz tačke  $Y(0, y_0, 0)$ , sa učestanošću  $n$ . a) Odrediti jačinu magnetskog polja  $H$  u tački  $Y$ . b) Odrediti  $H$  ako je  $y_0 \gg \ell = \ell_+ + \ell_-$ .



Slika 31

## Rešenje

a) Rotiranje pozitivnog naelektrisanja  $q$  ekvivalentno je delovanju struje jačine  $qn$  ( $n$  je broj obrtaja u sekundi) po krugu poluprečnika  $\ell_+$ . Slično, kruženje negativnog naelektrisanja  $-q$  shvatamo kao struju jačine  $-qn$  po krugu poluprečnika  $\ell_-$ . Prva kružna kontura stvara magnetsko polje jačine

$$\vec{H}_+ = \frac{1}{2} qn \frac{\ell_+^2}{(\ell_+^2 + y_0^2)^{3/2}} \vec{e}_y, \quad (1)$$

gde je  $\vec{e}_y$  ort  $y$ -ose. Druga strujna kontura stvara magnetsko polje jačine

$$\vec{H}_- = -\frac{1}{2} qn \frac{\ell_-^2}{(\ell_-^2 + y_0^2)^{3/2}} \vec{e}_y. \quad (2)$$

Ukupna jačina magnetskog polja je onda

$$\vec{H} = \frac{pn}{2\ell} \left[ \frac{\ell_+^2}{(\ell_+^2 + y_0^2)^{3/2}} - \frac{\ell_-^2}{(\ell_-^2 + y_0^2)^{3/2}} \right] \vec{e}_y. \quad (3)$$

gde smo  $q$  izrazili preko momenta  $p = q\ell = q(\ell_+ + \ell_-)$ .

b) Ako je  $y_0 \gg \ell$ , intenzitet vektora jačine magnetskog polja je

$$H \simeq \frac{pn}{2y_0^3} \Delta\ell, \quad (4)$$

gde je  $\Delta\ell = \ell_+ - \ell_-$  rotacioni ekscentricitet.

## Pitanja i komentari

Procenimo jačinu magnetskog polja u koordinantom početku. Stavljajući  $y_0 = 0$  u relaciju (3) dobijamo

$$H = \frac{pn}{2\ell} \left( \frac{1}{\ell_+} - \frac{1}{\ell_-} \right). \quad (5)$$

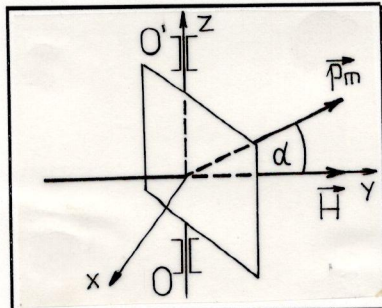
Ako je  $\ell_- > \ell_+$ , polje je usmereno duž  $+y$ -ose. Ali tada prema relaciji (4), u tački Y imamo polje koje je usmereno duž negativnog smera  $y$ -ose. To znači da je negde u intervalu  $(0, y_0)$  magnetsko polje jednako nuli. Drugim rečima, može se izabrati takvo  $y_0$ , za dati odnos  $\ell_+/\ell_-$  i za date veličine  $n$ ,  $p$  i  $\ell$ , da u tački Y važi  $H = 0$ . Pokažite da je rešenje takvog zadatka

$$\frac{y_0}{\ell} = \sqrt{\frac{r\ell_-^2 - \ell_+^2}{(1-r)\ell^2}}, \quad (6)$$

gde je  $r = (\ell_+/\ell_-)^{4/3}$ . Izračunajte  $y_0/\ell$  za  $\ell_+ = \ell/3$  i  $\ell_- = 2\ell/3$ .

## 32.

U homogenom magnetskom polju jačine  $\vec{H}$  nalazi se ravna strujna kontura magnetskog momenta  $\vec{p}_m$ . Kontura može da rotira oko ose  $OO'$  (videti Sliku 32).



Slika 32

Za tu osu, moment inercije konture je  $J$ . Na početku, vektor  $\vec{p}_m$  usmeren je duž  $y$  ose, tj. paralelan je vektoru  $\vec{H}$ . Onda smo konturu izveli iz ravnorežnog položaja i ona izvodi harmonijske oscilacije male amplitude. a) Odrediti kružnu učestanost  $\omega$  tih oscilacija. b) Izračunati  $\omega$  ako je  $p_m = 10^{-4} \text{ Am}^2$ ,  $\mu_0 H = 10^{-2} \text{ T}$  i  $J = 10^{-8} \text{ kg m}^2$ .

## Rešenje

a) Na ravnu strujnu konturu u homogenom magnetskom polju deluje spreg sila momenta

$$\vec{M} = -p_m B \sin \alpha \vec{e}_z. \quad (1)$$

Ovde je  $B = \mu_0 H$ , a  $\vec{e}_z$  je ort  $z$  ose. Ugao  $\alpha$  je ugao između vektora  $\vec{H}$  i  $\vec{p}_m$  u datom momentu oscilovanja. Po drugom zakonu dinamike rotacionog kretanja možemo pisati

$$\vec{M} = J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \vec{e}_z. \quad (2)$$

Smenjujući (1) u (2) dolazimo do diferencijalne jednačine

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + p_m B \sin \alpha = 0. \quad (3)$$

Za male vrednosti ugla  $\alpha$  imamo  $\sin \alpha \approx \alpha$ , tako da prethodni izraz postaje

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{p_m B}{J} \alpha = 0. \quad (4)$$

Trenje u sistemu smo zanemarili; dobijena je jednostavna diferencijalna jednačina, poznata iz mnogih sličnih problema mehanike. Rešenja potražimo u obliku

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \phi_0). \quad (5)$$

Zamenom (5) u (4) dobijamo

$$\omega = \sqrt{\frac{p_m B}{J}}. \quad (6)$$

Dakle, kontura će izvoditi harmonijske oscilacije. Period tih oscilacija utoliko je veći ukoliko je moment inercije veći.

b) Polazeći od relacije (6), nalazimo (znajući da je  $B = \mu_0 H$ )  $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ . Odavde jednostavno dobijamo za period oscilovanja  $T = 2\pi/\omega = 0,628 \text{ s}$ .

#### Pitanja i komentari

Metod opisan u ovom zadatku može da se upotrebi kao osnov za merenje jačine magnetskog polja. Pretpostavimo da smo uspeli izmeriti  $T_0$ , period oscilovanja rama sa strujom, u poznatom etalonskom polju jačine  $H_0$ . Posle toga primenimo isti merni sistem u polju nepoznate jačine  $H$  i nadjimo novi period  $T$ . Primenom relacije (6) nalazimo u prvom slučaju

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mu_0 p_m H_0}}, \quad (7)$$

dok je u drugom slučaju

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mu_0 p_m H}}. \quad (8)$$

Kombinujući ove dve relacije lako nalazimo jačinu magnetskog polja

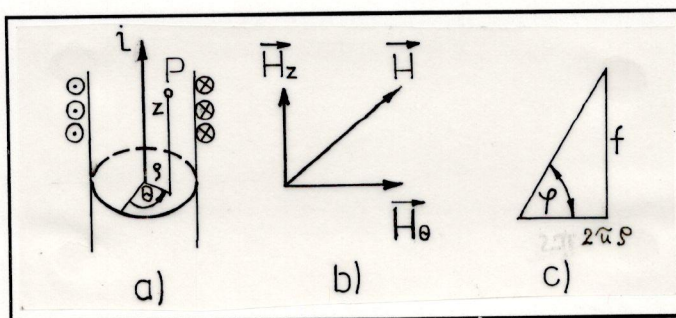
$$H = H_0 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2. \quad (9)$$

Princip se svodi na merenje ušestanosti, ili vremenskih intervala i može da se postigne visoka tačnost. Medjutim, metod nije lak sa eksperimentalne tačke gledišta. Naravno, umesto kalema može da se upotrebi, možda i sa većom pogodnošću, magnetska igla određenog magnetskog momenta  $\vec{p}_m$ , čiju tačnu vrednost i ne moramo znati, jer se ona ne javlja eksplicitno u formuli (9).

Kakav bi merni postupak morao da se izvede za slučaj da vektor  $\vec{H}$  ne leži u  $xOy$  ravni? (Naginjane mernog uređaja je nepraktičan postupak koji bi podrazumevao unošenje teško kontrolisanih izvora grešaka).

## 33.

Dugi, pravi provodnik postavljen je duž ose dugog solenoida. Jačina struje kroz provodnik je  $i$ , u naznačenom smeru (videti Sliku 33 skica a). Solenoid ima  $N$  navoja po jedinici dužine, kroz navoje teče struja jačine  $I$ . a) Odrediti formu linija sile magnetskog polja u centralnom delu solenoida. b) Izračunati odgovarajuće parametre za silnicu koja tangira namotaj sa unutrašnje strane, ako je  $N = 1000$  navoja po metru  $i = 10$  A,  $I = 0,1$  A i  $R = 10$  cm.



Slika 33

## Rešenje

a) U nekoj tački  $P(\rho, \theta, z)$  cilindričnog sistema sa skice a), komponente  $z$  i  $\theta$  jačine magnetskog polja su, redom,

$$H_z = NI, \quad (1)$$

$$H_\theta = \frac{i}{2\pi\rho}, \quad (2)$$

po odgovarajućim formulama za polje oko pravog provodnika  $i$  u centru solenoida. Rezultujući vektor  $\vec{H}$  zaklapa ugao  $\varphi$  prema komponenti  $\vec{H}_\theta$  (skica b na Slici 33), pri čemu je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H_z}{H_\theta} = \frac{NI}{i} 2\pi\rho. \quad (3)$$

Nagib linije sile magnetskog polja ne menja se za dato  $\rho$ . One su spiralne, sa konstantnim hodom spirale  $f$ . Nadjimo  $f$  imajući u vidu skicu c). Kad linija sile tačno jednom obidje obim cilindra poluprečnika  $\rho$ , tačka P će se



”popeti” za visinu  $f$ ; pri tom je dužina silnice hipotenuza pravouglog trougla i odmah nalazimo

$$f = 2\pi\rho \operatorname{tg}\varphi. \quad (4)$$

Imajući u vidu relaciju (3), dobijamo

$$f = (2\pi)^2 \frac{NI}{i} \rho^2. \quad (5)$$

Hod spirale raste sa kvadratom njenog poluprečnika.

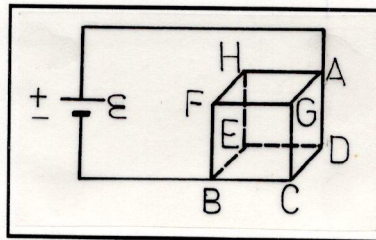
b) Za silnicu koja tangira namotaj treba uzeti  $\rho = R$ , pa je  $f = (2\pi)^2 10^{-1} \text{ m}$ .

#### Pitanja i komentari

Posmatrajte formulu (5). Je li logično da je  $f \sim I/i$ ? Može li se unapred shvatiti da će  $f$  biti proporcionalno kvadratu veličine  $\rho$ ? (Pokušajte da iskoristite dimenzionu analizu startujući od  $f \sim N^r I^p i^q \rho^s$ , uz zahtev da je  $f$  po dimenziji dužina.)

### 34.

Od žice konstantnog preseka, izvučene od homogenog, provodnog materijala, složena je kocka (Slika 34a). Teme  $A$  spojeno je za  $\oplus$ , a teme  $B$  za  $\ominus$  pol izvora struje e.m.s.  $\mathcal{E}$ . Kolika je magnetska indukcija u centru kocke? Zanemariti uticaj dovodnog i odvodnog provodnika.

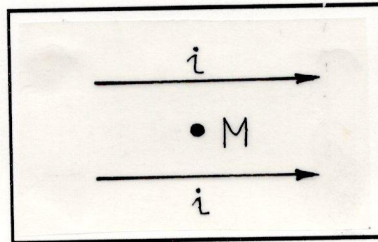


Slika 34a

#### Rešenje

Pod datim okolnostima, otpornosti svih ivica kocke jednake su. Ako je  $i$  struja koju daje strujni izvor, onda kroz delove kocke  $\overline{AH}$ ,  $\overline{AG}$  i  $\overline{AD}$ , a takodje i kroz  $\overline{FB}$ ,  $\overline{EB}$  i  $\overline{CB}$  teče struja jačine  $i/3$ . Ivicama  $\overline{HF}$ ,  $\overline{HE}$ ;  $\overline{GF}$ ,  $\overline{GC}$  i  $\overline{DE}$ ,  $\overline{DC}$  teku struje jačine  $i/6$  (neke detalje u analizi ovog složenog strujnog kola dali smo u našoj prvoj svesci zadataka **Električno polje**).

Na početku uočimo sledeći jednostavnu činjenicu: Dve paralelne duži kroz koje teče struja iste jačine u istom smeri, proizvode magnetsko polje koje u centralnoj tački  $M$  (Slika 34b) ima jačinu  $H = 0$ .



Slika 34b

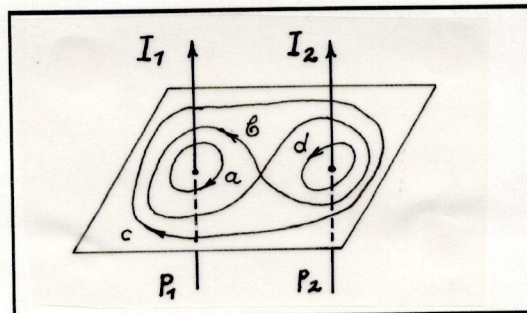
Magnetsko polje u centru kocke formiraju dvanaest duži. Njihovo delovanje, poštujući princip superpozicije, možemo prikazati grupisanjem šest parova kao što je onaj sa Slike 34b. To su parovi  $[\overline{AH}; \overline{CB}]$ ,  $[\overline{AD}; \overline{FB}]$ ,  $[\overline{AG}; \overline{EB}]$ ,  $[\overline{HE}; \overline{GC}]$ ,  $[\overline{HF}; \overline{DC}]$ ,  $[\overline{GF}; \overline{DE}]$ . Svaki par ponaosob daje u centru kocke  $B = 0$ . Dakle, u centru kocke je  $\vec{B} = 0$ .

#### Pitanja i komentari

Pokušajte da ovom rešenju pridjete i nekim drugim putem; na primer, pomoću osobina simetrije.

### 35.

a) Odrediti magnetski napon, odnosno cirkulaciju jačine magnetskog polja, duž zatvorenih kontura naznačenih na Slici 35. Poznate su jačine struja  $I_1$  i  $I_2$  u provodnicima  $P_1$  i  $P_2$ . Naznačeni su i smerovi struja, kao i smerovi obilaženja kontura. b) Izračunati pomenute magnetske napone ako je  $I_1 = 1$  A i  $I_2 = 1$  A.



Slika 35

#### Rešenje

a) Magnetski napon duž zatvorene strujne konture jednak je ukupnoj jačini električne struje koja protiče kroz površinu ograničenu datom kon-

turom

$$U_{m1} = \oint H_s ds = i. \quad (1)$$

Ovde je  $H_s$  projekcija vektora  $\vec{H}$  na pravac definisan vektorom elementa putanje  $d\vec{s}$ , tj. tangencijalna komponenta jačine magnetskog polja. Naravno da se posredstvom vektorskog računa može napisati  $H_s ds = \vec{H} \cdot d\vec{s}$  (skalarni proizvod dva vektora). Po definiciji je  $i = \sum_k I_k$  algebarska veličina. Ona je pozitivna ako je smer struje takav da odgovara pravilu desnog zavrtnja za dati usvojeni pozitivni smer obilaženja konture. U suprotnom,  $i$  se smatra negativnom veličinom. Shodno tom pravilu, za konturu  $a$  dobijamo

$$U_{m1} = -I_1. \quad (2)$$

Za konturu  $b$  u obliku osmice prva struja se uzima kao pozitivna, druga kao negativna, pa će biti

$$U_{m2} = I_1 - I_2. \quad (3)$$

Za konturu  $c$  koja obuhvata oba provodnika ali tako da nije zadovoljeno pravilo desnog zavrtnja pravilan će biti zapis u obliku

$$U_{m3} = -I_1 - I_2. \quad (4)$$

Na kraju, za konturu  $d$  vidimo da struja  $I_2$  ima smer koji se poklapa sa smerom normale površine pa je

$$U_{m4} = I_2. \quad (5)$$

b) Za date brojne vrednosti struja, dobijamo  $U_{m1} = -1$  A,  $U_{m2} = 0$ ,  $U_{m3} = -2$  A i  $U_{m4} = 1$  A.

#### Pitanja i komentari

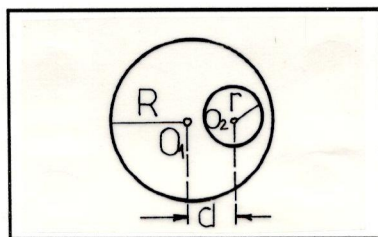
Ako su putanje  $a$ ,  $c$  i  $d$  prostorne krive (a ne kao na Slici 35 krive u naznačenoj ravni), da li se cirkulacije menjaju? Posebno, da li je to bitno za putanju  $b$ ?

U ovoj Zbirci često koristimo teoremu o cirkulaciji da olakšamo nalaženje magnetske indukcije za datu konfiguraciju provodnika. Znamo da je to lako učiniti za kružnu konturu oko pravog provodnika. Šta biva ako se provodnik savije i izgubi osobina simetrije? Ako se provodnik savije u krug simetrija svakako postoji, pa je logično pomisliti da se može naći pogodna kontura za jednostavno određivanje indukcije u tom slučaju. Da li je to tačno? (Na žalost nije; teorema o cirkulaciji tu ne može da pomogne; videti i komentar u zadatku 6)

Pojedini autori rado ističu analogiju između Gausove teoreme u elektrostatici i teoreme o cirkulaciji magnetskog polja. Koji su najupečatljiviji elementi te analogije?

## 36.

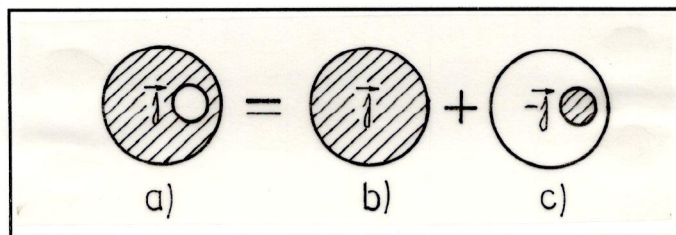
Kroz dugi, pravi, puni (od homogenog materijala) cilindar kružnog poprečnog preseka, poluprečnika  $R$ , teče konstantna električna struja jačine  $I$ . U provodniku postoji šupljina u obliku kružnog cilindra poluprečnika  $r$ . Ose dva cilindra su paralelne, na međusobnom rastojanju  $d$  (Slika 36a). a) Odrediti jačinu polja  $H$ , u šupljini. b) Izračunati  $H$  ako je gustina električne struje  $j = 2 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$  i  $d = 1 \text{ cm}$ .



Slika 36a

## Rešenje

Zadatak se može uspešno tretirati pomoću principa superpozicije. Postupak ćemo simbolički predstaviti pomoću šeme na Slici 36b.



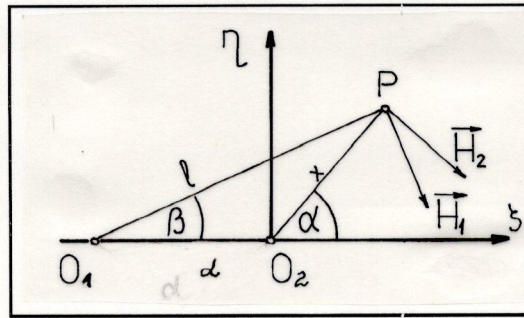
Slika 36b

Sistem  $a$  (konfiguracija iz zadatka) može se shvatiti kao zbir sistema  $b$  (puni provodnik kojim teče struja gustine  $j$ ) i sistema  $c$  (provodnik kojim protiče struja jedino kroz cilindar poluprečnika  $r$ , ali u suprotnom smeru, tj. gustina struje je  $-j$ ). Po principu superpozicije možemo pisati

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2, \quad (1)$$

gde se  $\vec{H}_1$  izračunava za neku tačku koja pripada prostoru šupljine u provodniku  $a$ , dok je  $\vec{H}_2$  ono polje u toj tački koje postoji u provodniku  $b$ . Lako

je odrediti polja  $\vec{H}_1$  i  $\vec{H}_2$  ako se poslužimo skicom na Slici 36c.



Slika 36c

Jačina magnetskog polja traži se u tački P; ona je na udaljenosti  $l$  od centra  $O_1$  i  $x$  od centra  $O_2$ . Zato je

$$H_1 = \frac{i_1}{2\pi l} = \frac{j\pi l^2}{2\pi l} = \frac{1}{2} j l, \quad (2)$$

$$H_2 = \frac{i_2}{2\pi x} = \frac{-j\pi x^2}{2\pi x} = -\frac{1}{2} j x. \quad (3)$$

Poslužimo se sada koordinatnim sistemom  $(\zeta, \eta)$  (Slika 36c) i nadjimo projekcije  $H_\zeta$  i  $H_\eta$  vektora  $\vec{H}$ . Pošto je

$$H_{1\eta} = -H_1 \cos \beta, \quad (4)$$

$$H_{2\eta} = -H_2 \cos \alpha, \quad (5)$$

biće, budući da je  $d = l \cos \beta - x \cos \alpha$ ,

$$H_\eta = H_{1\eta} + H_{2\eta} = -\frac{1}{2} j d. \quad (6)$$

Na sličan način nalazimo:

$$H_{1\zeta} = H_1 \sin \beta, \quad (7)$$

$$H_{2\zeta} = H_2 \sin \alpha, \quad (8)$$

a kako je  $l \sin \beta = x \sin \alpha$  imamo

$$H_\zeta = H_{1\zeta} + H_{2\zeta} = 0. \quad (9)$$

Ova analiza pokazuje da je vektor  $\vec{H}$  u celini upravljen po osi  $\eta$  i pritom jačina polja ima vrednost

$$H = \frac{1}{2} j d, \quad (10)$$

u svim tačkama šupljine, tamo je dakle homogeno magnetsko polje. Ako struja ima smer od crteža prema posmatraču,  $\vec{H}$  je usmereno duž pozitivnog smera  $\eta$  ose.

b) Imajući u vidu zadate brojne vrednosti, dobijamo  $H = 10^4$  A/m.

#### Pitanja i komentari

Izuzetna lepota ovog zadatka učinila je da su mnogi autori zbirki zadataka iz elektromagnetizma smatrali da ga obavezno treba ponuditi studentima. Naravno, način rešavanja je različit u raznim zbirkama. Primera radi pokušajte samostalno da dobijete rezultat vektorskim računom ( $\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{j} \times \vec{d}$ ).

Da li je moguće, na bazi nekih opštih fizičkih principa, zaključiti da će  $H$  biti homogeno u šupljini ne vršeći nikakva konkretna izračunavanja poput naših, gore izloženih? Ako je to moguće, onda se  $H$  lako nalazi izračunavajući ga u tački  $O_2$ .

Rezultat (10), vidimo, ne zavisi od  $R$  i  $r$ . Ipak, da bi zadatak imao smisla, neka ograničenja moraju postojati. Koja? Ako šupljina dodiruje spoljašnju površinu provodnika, pokazati da je  $H = I/2\pi(R+r)$  gde je  $I$  jačina struje provodnika. Ako još uzmemo da je  $d$  veoma malo, imaćemo i rešenje za magnetsko polje u unutrašnjosti šupljeg cilindra kad je debljina zida zavisna od polarnog ugla. Pokušajte da rešite zadatak kad je  $d = R$  (procena polja u žljebu cilindra).

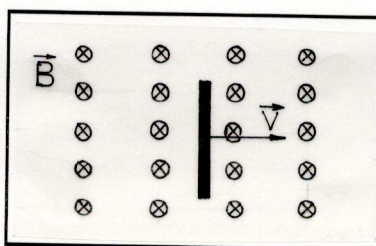
Pokušajte da rešite zadatak sa dve, u odnosu na centar simetrično postavljene šupljine. Koji je osnovni utisak u vezi sa tom generalizacijom?

## GLAVA ČETVRTA

## ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

## 37.

Brzinom  $v = 15 \text{ m/s}$ , normalno na linije sila magnetskog polja indukcije  $B = 0,5 \text{ T}$  kreće se provodnik dužine  $\ell = 1 \text{ m}$  (Slika 37). Naći elektromotornu silu koja se indukuje u provodniku.



Slika 37

## Rešenje

Rešimo zadatak bez pozivanja na koordinatne sisteme. Na osnovu Faradejevog zakona

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

za indukovanu elektromotornu silu, treba odrediti promenu fluksa  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$  vektora magnetske indukcije  $\vec{B}$  u jedinici vremena. Pošto je element površine

$$dS = \ell v dt, \quad (2)$$

koju provodnik prebriše za interval vremena  $dt$ , a imajući u vidu da je vektor  $\vec{B}$  kolinearan sa vektorom  $d\vec{S}$  sledi

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v. \quad (3)$$

Zamenjujući vrednosti date u zadatku dobijamo brojnu vrednost indukovane elektromotorne sile  $\mathcal{E} = -7,5 \text{ V}$ .

## Pitanja i komentari

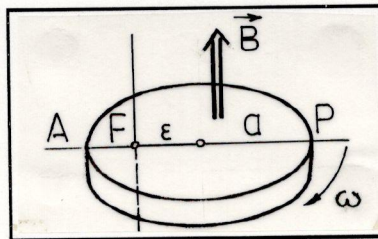
Odrediti smer indukovane elektromotorne sile, tj. na pokretnom provodniku odrediti pol na kojem će se nagomilavati pozitivno opterećenje i pol na kojem će se nagomilavati negativno opterećenje.

Neka vektor  $\vec{v}$  brzine pokretnog provodnika umesto ugla od  $\pi/2$  gradi ugao  $\alpha$  sa vektorom magnetske indukcije  $\vec{B}$ . Kolika je u tom slučaju indukovana elektromotorna sila? Naći onaj ugao  $\alpha_1$  pri kome će elektromotorna sila koja se indukuje u provodniku biti dva puta manja nego kada je vektor brzine normalan na linije sila magnetskog polja.

## 38.

Eliptični metalni disk vrti se u horizontalnoj ravni oko vertikalne ose u konstantnom, homogenom, vertikalno usmerenom magnetskom polju indukcije  $\vec{B}$ . Osa rotacije prolazi kroz jednu od žiža elipse. Disk rotira ugaonom brzinom  $\omega$ . Poznata je dužina  $\varepsilon$ , rastojanje žiže od centra elipse. a) Odrediti napon  $U$  između tačaka A i P (Slika 38). b) Izračunati  $U$  ako se disk okreće 50 puta u sekundi a  $B = 0,01$  T. Uzeti da je  $a = 10$  cm,  $\varepsilon = 2$  cm.

Rešenje



Slika 38

a) Neka je situacija prikazana na Slici 38 trenutni "snimak" rotirajućeg diska. Potom će poteg  $\overline{FP}$  za vreme  $dt$  prebrisati površinu

$$dS_1 = \frac{1}{2}(a + \varepsilon)^2 \omega dt, \quad (1)$$

a poteg  $\overline{FA}$

$$dS_2 = \frac{1}{2}(a - \varepsilon)^2 \omega dt. \quad (2)$$

Odgovarajuće promene flukseva su

$$d\Phi_1 = -\frac{1}{2}B(a + \varepsilon)^2 \omega dt, \quad (3)$$

$$d\Phi_2 = +\frac{1}{2}B(a - \varepsilon)^2 \omega dt. \quad (4)$$

Oдавде sledi, prema zakonu elektromagnetske indukcije, da će se indukovati elektromotorne sile

$$\mathcal{E}_1 = +\frac{1}{2}B(a + \varepsilon)^2 \omega, \quad (5)$$



$$\mathcal{E}_2 = -\frac{1}{2}B(a - \varepsilon)^2\omega. \quad (6)$$

Traženi napon  $U$  biće

$$U = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2, \quad (7)$$

što se svodi (uz aproksimaciju  $a \gg \varepsilon$ ) na formulu

$$U = 2B\omega a\varepsilon. \quad (8)$$

Kao što smo i očekivali, ovaj se izraz anulira za  $\varepsilon = 0$ .

b) Poznata je učestanost rotiranja, pa ćemo odmah izračunati ugaonu brzinu  $\omega = 100 \pi \text{ s}^{-1}$ . Sada iz formule (8) izračunavamo  $U \simeq 12,6 \text{ mV}$ .

#### Pitanja i komentari

Zašto je u izrazu (3) negativan znak, kojeg nema u izrazu (4)? Primenite Lencovo pravilo u razjašnjavanju te situacije. Prosledite za smerovima Lorencove sile, jednom u nekoj tački potega  $\overline{FP}$ , drugi put u nekoj tački potega  $\overline{FA}$ ; kuda su usmerene sile?

U zadatku pominjemo jedino Lorencovu silu. Ali, zbog delovanja centrifugalne sile, kad disk rotira javlja se i napon  $U_c$ . Moduli dva napona zadovoljavaju odnos

$$\frac{U}{U_c} = \frac{\omega_c}{\omega}, \quad (9)$$

gde je  $\omega_c = eB/m$  elektronska ciklotronska učestanost. Kako je  $U \sim \omega$  i  $U_c \sim \omega^2$ , tačnije možemo da zapišemo desnu stranu formule (8) u obliku  $2B\omega a\varepsilon(1 + h\omega/\omega_c)$ , gde  $h$  može biti  $+1$  ili  $-1$ , zavisno od smera rotacije diska.

### 39.

Metalni štap dužine  $\ell = 0,2 \text{ m}$  nalazi se u ravni čija normala sa homogenim magnetskim poljem indukcije  $B = 0,5 \text{ T}$  gradi ugao  $\theta = \pi/4$ . Odrediti ugaonu brzinu  $\omega$  kojom treba da rotira štap oko jednog svog kraja da bi se na krajevima štapa obrazovao napon  $U = 0,15 \text{ V}$ .

#### Rešenje

Na osnovu Faradejevog zakona za indukovanu elektromotornu silu  $\mathcal{E} = | - d\Phi/dt |$  treba naći elementarni fluks  $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$  magnetskog polja  $\vec{B}$  kroz površinu

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}\ell^2 d\varphi \vec{n} \quad (1)$$

koju prebriše štap ako se obrne za ugao  $d\varphi$ . Kako vektori  $\vec{B}$  i  $\vec{n}$  grade ugao  $\theta$ , imamo da je

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} B \ell^2 \omega \cos \theta. \quad (2)$$

Rešavajući zadnju jednačinu po ugaonoj brzini  $\omega$  konačno dobijamo

$$\omega = \frac{2U}{B \ell^2 \cos \theta}, \quad (3)$$

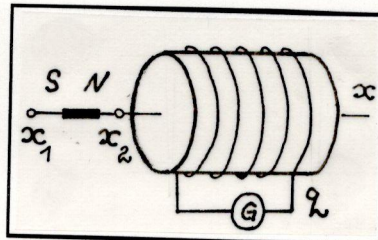
što posle zamene brojnih vrednosti daje  $\omega = 21,2 \text{ rad/s}$ .

#### Pitanja i komentari

Zamislimo da pokretni kraj štapa klizi po provodnoj kružnici koja je za nepokretni deo štapa spojena provodnim poluprečnikom  $\ell$  koji je sačinjen od istog materijala (podužnog otpora  $\lambda = 1 \Omega/\text{m}$ ) kao kružnica i štap. Ako se u početnom trenutku štap koji rotira poklapao sa provodnim poluprečnikom naći jačinu struje koja protiče kroz štap.

#### 40.

Stalni magnet SN (Slika 40) pomeramo duž ose  $x$  i približavamo ga solenoidu čija se osa poklapa sa osom  $x$ . a) Da li će brže kretanje magnet ka solenoidu usloviti da veća količina opterećenja  $q$  protекne kolom (što će pokazati galvanometar G)? b) Koji je način da pri zatom  $q$  primaknemo magnet solenoidu sa što manjim radom protiv elektromagnetskih sila u sistemu? Ukupna električna otpornost kola koje sadrži solenoid i galvanometar je  $r$ .



Slika 40

#### Rešenje

a) Kad se magnet približava, raste fluks  $\Phi$  kroz navoje solenoida, te je struja u kolu

$$i = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Ukupno proteklo naelektrisanje  $q$  koje pokazuje galvanometar iznosi

$q = \int i dt$ , što posle korišćenja relacije (1) daje

$$q = - \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dt} dt, \quad (2)$$

odnosno,

$$q = \frac{1}{r} (\Phi_1 - \Phi_2). \quad (3)$$

Vidi se da  $q$  zavisi od početnog  $\Phi_1$  i završnog  $\Phi_2$  fluksa. Medjutim,  $q$  ne zavisi od brzine promene fluksa, tj. isto  $q$  će se dobiti bez obzira na brzinu približavanja magneta, svaki put kad je isti početni  $x_1$  i konačni  $x_2$  položaj magneta.

b) Pri približavanju magneta ulažemo rad  $A$  na savladjivanju elektromagnetskih sila  $F$ . Pošto je

$$A \sim F, \quad F \sim i, \quad i \sim \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4)$$

zaključujemo da će biti

$$A \sim \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5)$$

Što je manji vremenski interval  $\Delta t$  potreban da se magnet približi za  $\Delta x = x_2 - x_1$ , veći je i rad pritom izvršen. Rad se može smanjiti smanjivanjem brzine približavanja magneta.

#### Pitanja i komentari

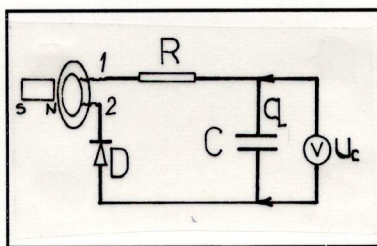
Na osnovu Lencovog pravila pokažite da je smer struje u kolu onaj prikazan na slici, ako je severni pol N bliži solenoidu.

---

#### 41.

---

Potrebno je izmeriti magnetsku indukciju blizu pola stalnog magneta pomoću kola sa Slike 41. Upotrebljena je ravna petlja površine  $S$  koja se sastoji od  $n$  navoja tanke, izolovane žice. Na početku, magnetski fluks  $\Phi$  kroz petlju je bio maksimalan, a onda smo zarotirali petlju do položaja gde je  $\Phi = 0$ . Voltmetrom  $V$  izmerili smo definitivni napon na kondenzatoru  $u_c = U$ . a) Kolika je srednja vrednost magnetske indukcije  $B$  na mestu petlje? b) Izračunati  $B$  ako je  $R = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $C = 5 \mu\text{F}$ ,  $n = 20$  navoja,  $S = 5 \text{ cm}^2$  i  $U = 1 \text{ mV}$ .



Slika 41

## Rešenje

a) Indukovani napon na kalemu između tačaka 1 i 2, u nekom trenutku dok se on pomera, iznosi

$$u = nS \frac{dB}{dt}. \quad (1)$$

Smatrajući da je proces kvazistacionaran, primenimo II Kirhofovo pravilo za dato kolo

$$u = Ri + \frac{q}{C}. \quad (2)$$

Napon  $u_c$  na kondenzatoru je  $u_c = q/C$  odnosno,

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (3)$$

Pretpostavljajući da je proizvod  $RC$  (vremenska konstanta kola) veliki, biće

$$u_c \simeq \frac{1}{CR} \int u dt, \quad (4)$$

odnosno,

$$u_c = \frac{1}{CR} nS \int dB. \quad (5)$$

Posle uspostavljanja ravnoteže u kolu važiće

$$U = \frac{nS}{CR} B, \quad (6)$$

odakle je tražena srednja vrednost magnetske indukcije

$$B = \frac{CRU}{nS}. \quad (7)$$

Ako su poznati parametri kola ( $C$ ,  $R$ ,  $n$  i  $S$ ) i ako smo izmerili napon na kondenzatoru  $U$ , pomoću ove formule možemo izračunati  $B$ . Aparatura

koja bi funkcionisala na ovom principu može biti tako izbaždarena da se na instrumentu voltmetra direktno očitava magnetska indukcija.

b) Zamena brojnih vrednosti daje  $B = 0,5 \text{ T}$ .

#### Pitanja i komentari

Upotrebljena  $RC$  kombinacija naziva se *integrator*. Zajedno sa sondom (petljom) i voltmetrom on ovde čini jedan jednostavni *magnetometar*.

Koja je uloga diode u kolu (element D na Slici 41)?

Ako imamo na raspolaganju osciloskop, integrator može da posluži i za merenje vremenski promenljivih polja, na primer harmonijskog oblika  $B = B_m \sin(\omega t)$ . Kako?

### 42.

U električno kolo u obliku kvadrata stranica dužine  $a = 1,5 \text{ m}$  vezana je tinjalica unutrašnje otpornosti  $r = 10 \Omega$  čiji je napon paljenja  $U_p = 0,1 \text{ V}$ . Kolo se nalazi u ravni koja je normalna na homogeno magnetsko polje  $\vec{B}$ . Počev od trenutka  $t = 0$  intenzitet magnetnog polja počinje da se povećava po zakonu  $B = B_0 + At$ . Ako je otpornost provodnika koji čini kolo  $R = 0,1 \Omega$  naći minimalnu vrednost konstante  $A$  da bi se tinjalica upalila.

#### Rešenje

Elektromotorna sila koja se indukuje u konturi može se naći pomoću formule

$$\mathcal{E} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right|, \quad (1)$$

dok je promena fluksa  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  magnetnog polja u jedinici vremena kroz konturu konstantne površine  $S = a^2$

$$\frac{d\Phi}{dt} = a^2 \frac{dB(t)}{dt}. \quad (2)$$

Znajući da je po uslovu zadatka  $B(t) = B_0 + At$  lako dobijamo

$$\mathcal{E} = Aa^2. \quad (3)$$

Ako sada na dato električno kolo primenimo drugo Kirhofovo pravilo, imamo:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (4)$$

Da bi se tinjalica upalila napon na tinjalici  $U_t = ri$  treba da bude veći ili jednak naponu paljenja  $U_p$ . Koristeći se izrazima (3) i (4) lako dobijamo

$$A \geq \frac{U_p}{a^2} \left( 1 + \frac{R}{r} \right). \quad (5)$$

Smenjujući brojne vrednosti u zadnji izraz dobijamo minimalnu vrednost za brzinu promene magnetskog polja  $A = 0,0489 \text{ T/s}$ .

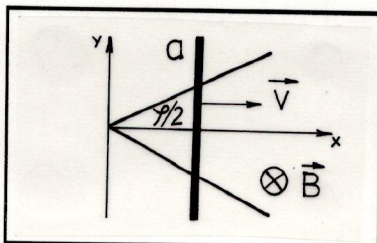
Pitanja i komentari

Imajući u vidu dobijenu brojnu vrednost za konstantu  $A$  procenite red veličine za interval vremena u kome je moguće povećavati magnetsko polje po datom zakonu?

Pod pretpostavkom da je magnetsko polje konstantno, pojava indukovane elektromotorne sile može se dogoditi ako se površina konture menja u vremenu. Pod uslovom da se prilikom deformacije konture ne menja njena otpornost naći zakon promene površine konture  $S(t)$  da bi se tinjalica upalila. Postoje li ograničenja na način promene ove površine?

43.

U delu prostora ograničenog dvema ravnima koje zaklapaju ugao  $\varphi$  oseća se dejstvo homogenog magnetskog polja  $\vec{B}$  (videti Sliku 43). Neka se duž ose simetrije ovog dela prostora kreće šipka dužine  $a$  konstantnom brzinom  $\vec{v}$ . Naći elektromotornu silu koja se indukuje u šipki.



Slika 43

Rešenje

Neka je magnetsko polje usmereno kao na slici tj.  $\vec{B} = -\vec{e}_z$ . Električno polje koje se javlja u sistemu koji se kreće u odnosu na magnetsko polje dobijamo iz zakona transformacije (za nerelativističke brzine)

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Kako je  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ , imamo da je  $\vec{E} = Bv\vec{e}_y$ . Elektromotornu silu možemo naći iz izraza

$$\mathcal{E} = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (2)$$

Kretanje šipke možemo podeliti na tri dela. Označimo sa  $t = 0$  trenutak kada šipka ulazi u magnetsko polje. Do tog trenutka tj. za  $t \leq 0$ , pošto se šipka nalazila u delu prostora u kome nema magnetskog polja imamo da je  $\mathcal{E} = 0$ . U intervalu  $0 < t \leq t_1$  samo deo šipke se nalazi u magnetskom polju, pa izraz (2) za ovaj interval postaje

$$\mathcal{E} = \int_{-y(t)}^{y(t)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (3)$$

gde je

$$y(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) vt, \quad (4)$$

pozitivna koordinata dela dela šipke koji se nalazi na granici prostora u kome deluje magnetsko polje. Iz izraza (3) i (4) imamo

$$\mathcal{E} = 2v^2 B \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) t. \quad (5)$$

Trenutak

$$t_1 = \frac{a}{2v \operatorname{tg}(\varphi/2)}, \quad (6)$$

kada će se šipka celom dužinom naći u magnetskom polju, dobijamo iz uslova  $y(t_1) = a/2$ . Za interval  $t > t_1$  izraz (2) daje

$$\mathcal{E} = Bav. \quad (7)$$

Sve dobijene rezultate možemo zajedno zapisati u obliku

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ 2v^2 B \operatorname{tg}(\varphi/2) t, & 0 < t \leq a/2v \operatorname{tg}(\varphi/2); \\ Bav, & t > a/2v \operatorname{tg}(\varphi/2). \end{cases} \quad (8)$$

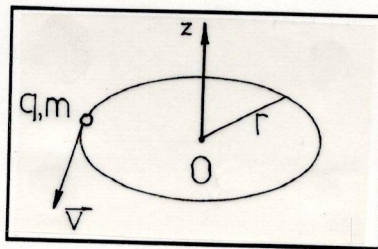
#### Pitanja i komentari

Koristeći se Faradejevim zakonom o promeni magnetskog fluksa reprodukovati rezultate ovog zadatka.

Uzimajući da je  $\varphi = \pi/2$ , dužina šipke  $a = 0,5$  m i brzina kojom se šipka kreće  $v = 1$  m/s naći trenutak kada će indukovana elektromotorna sila u šipki prestati da raste. Skicirajte funkciju.

## 44.

Čestica naelektrisanja  $q$  i mase  $m$  rotira u ravni oko tačke  $O$  po krugu konstantnog poluprečnika  $r$ . Duž  $z$ -ose (Slika 44), normalno na ravan putanje, deluje magnetsko polje čija jačina postepeno raste, od nule do vrednosti  $H$ . a) Odrediti priraštaj brzine čestice  $\Delta v$  kao funkciju jačine polja  $H$ . b) Izračunati  $\Delta v$  ako je čestica elektron, poluprečnik  $r = 5 \cdot 10^{-11}$  m i  $H = 1,14 \cdot 10^7$  A/m.



Slika 44

## Rešenje

a) Kao posledica porasta magnetskog fluksa  $\Phi$  kroz površinu kruga  $S = \pi r^2$  javlja se indukovana e.m.s.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

U suštini nju uzrokuju strane sile koje se ispoljavaju kroz solenoidno električno polje jačine  $\vec{E}$  koje deluje duž kružne putanje. Drugim rečima, postoji veza

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E 2\pi r. \quad (2)$$

Sila  $qE$  ubrzava naelektrisanu česticu. Stoga je po drugom Njutnovom zakonu

$$m \frac{dv}{dt} = qE, \quad (3)$$

što posle korišćenja izraza (1) i (2) postaje

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{q}{m} \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4)$$

Uvedimo magnetsku indukciju  $B = \mu_0 H$ . Sada, budući da je  $d\Phi = \pi r^2 dB$ , odavde odmah dobijamo ukupnu promenu brzine čestice posle uspostavljanja



polja

$$\Delta v = -\frac{q}{2m} r \mu_0 H. \quad (5)$$

Vidimo da će stečeni impuls  $p = m \Delta v$  biti utoliko veći ukoliko je veće specifično naelektrisanje čestice  $q/m$ , za dati poluprečnik putanje  $r$  i postojeću jačinu magnetske indukcije.

b) Za elektron,  $q/m$  iznosi  $1,758 \cdot 10^{11}$  C/kg pa je  $|\Delta v| \simeq 20 \pi$  m/s.

#### Pitanja i komentari

Pokušajmo da upotrebimo rezultat (5) za elementarnu analizu dijamagnetizma atoma. Promena mehaničkog momenta (momenta količine kretanja) za sistem sa Slike 44 je  $\Delta L = mr \Delta v$ , a promena magnetskog momenta (videti izlaganje u udžbeniku, paragraf §115) iznosi  $P_m = e \Delta L / 2m$ . Na taj način je

$$P_m = -\frac{e^2}{4m} r^2 B. \quad (6)$$

Interesantno je da se formalno isti obrazac dobija i pri strogom kvantnomehantičkom tretmanu problema. Istina, tada umesto  $r^2$  treba uzeti veličinu  $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle$  (usrednjavanje po elektronskom oblaku). U osnovnom stanju, elektronski oblak atoma je sferno simetričan sistem, pa je još  $\langle r^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle$ . Želimo li uvesti oznaku  $\langle \rho^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle$ , za srednje rastojanje od jezgra atoma, imaćemo

$$P_m = -\frac{e^2}{6m} \langle \rho^2 \rangle B. \quad (7)$$

Magnećenje supstancije (magnetski momenat jedinične zapremine) iznosiće  $I = n P_m$ , odnosno

$$I = -\frac{\mu_0 n e^2}{6m} \langle \rho^2 \rangle H. \quad (8)$$

Ovde je  $n$  koncentracija atoma (broj atoma u jedinici zapremine). Prema definiciji (videti u Uvodu formulu (31)), magnetska susceptibilnost će biti

$$\kappa = -\frac{\mu_0 n e^2}{6m} \langle \rho^2 \rangle. \quad (9)$$

Negativnost ove veličine jasna je već i u svetlu Lencovog principa. Značajno je da relacija (9) dopušta procenu dimenzija atoma ( $\sqrt{\langle \rho^2 \rangle}$ ), pod uslovom da prethodno izmerimo susceptibilnost dotične supstancije.

Interesantno je da se formula (5) može iskoristiti i za razumevanje rada *betatrona*, uređaja za ubrzavanje elektrona do energija reda veličine desetak miliona elektronvolti. Na putanji poluprečnika  $R$  elektron ima impuls

$p = mv = eBR$  što je u skladu sa ravnotežom sila  $evB = mv^2/R$ . Istovremeno, naš zadatak rezultira relacijom  $p = e\pi R^2 B_{srednje}/2\pi R$ . Tako, vidimo da u betatronu mora biti magnetska indukcija na putanji dvaput manja od srednje magnetske indukcije po preseku tj.

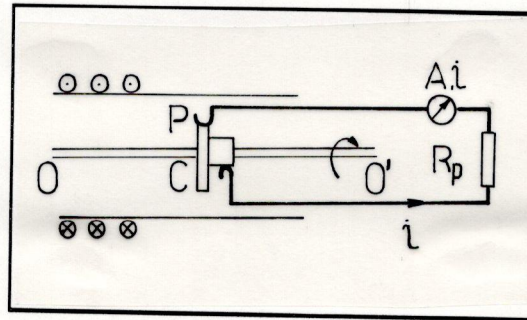
$$B = \frac{1}{2} B_{srednje}. \quad (10)$$

Ovo je uslov pravilnog rada betatrona.

Iskoristili smo jedan jednostavan zadatak da asociiramo na dva različita fizička problema: dijamagnetizam i akceleracija elektrona. Takvo otkrivanje unutrašnjih veza medju naoko različitim pojmovima često je u fizici i za nju karakteristično.

## 45.

Dat je dugi solenoid, sa  $n$  navoja po jedinici dužine. U sredini solenoida se nalazi metalni disk prečnika  $D$ . Disk može da rotira oko ose koja se poklapa sa osom solenoida  $OO'$  (Slika 45a). Pomoću specijalno izvedenih kontakata na periferiji i u centru diska zatvoreno je strujno kolo u koje još ulaze ampermetar i potrošač otpornosti  $R_p$ . a) Koliku struju  $i$  pokazuje ampermetar kad se disk okreće sa  $N$  obrtaja u sekundi? b) Izračunati  $i$  ako je  $D = 25$  cm,  $N = 100$ ,  $n = 10^5$  A/m i  $R = 25 \Omega$ .



Slika 45a

## Rešenje

a) Poluprečnik diska CP, koji spaja kontakte prebriše za vreme  $dt$  površinu  $dS = D^2\omega dt/8$ , gde je  $\omega$  ugaona brzina diska. Promena fluksa je  $d\Phi = B dS$  i zato će biti

$$d\Phi = \frac{1}{8} BD^2\omega dt. \quad (1)$$

Znamo da je magnetska indukcija u centru solenoida  $B = \mu_0 n$ , a indukovana e.m.s. u kolu je  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ . Kad izvršimo potrebne smene, biće

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0}{8} D^2\omega n. \quad (2)$$

Po Omovom zakonu, struja u kolu je

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (3)$$

ako možemo pretpostaviti da su sve ostale otpornosti u kolu zanemarljive, što ćemo ovde i učiniti. Tako, definitivno nalazimo

$$i = \frac{\mu_0}{8} \frac{D^2 \omega n}{R} . \quad (4)$$

Ovde smo zanemarili i negativan znak kao nebitan za naše razmatranje. Naravno treba iskoristiti i poznatu vezu  $\omega = 2\pi N$ , što daje za struju

$$i = \frac{\pi}{4} \mu_0 \frac{D^2 N n}{R} . \quad (5)$$

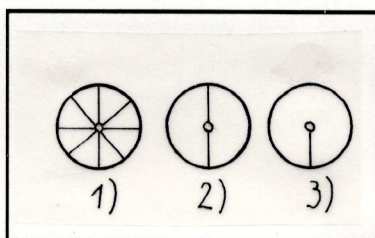
b) Ampermetar pokazuje struju  $i = 24,7$  mA.

#### Pitanja i komentari

Ako je smer struje u navojcima solenoida onakav kako je simbolično pomoću znaka  $\odot$  i  $\otimes$  pokazano na Slici 45a, da li je smer struje  $i$  zaista takav kad disk rotira u smeru kretanja kazaljke na satu (gledano s desna na levo)? (Posmatrajte smer Lorencove sile na elektron u metalu.)

Da li je svejedno o kakvom se materijalu diska radi; na primer, u čemu bi se razlikovali diskovi od bakra i gvoždja? Na kojem mestu analize smo mogli uzeti u obzir te razlike?

Da li je bitno da je disk pun? Zahteva li modifikaciju rešenja promena eksperimenta tako da se umesto diska stave točkovi 1, 2 ili 3 sa Slici 45b?



Slika 45b

(Rešenje ostaje isto; iznesite razloge.)

Ako isključimo napajanje solenoida, da li je ukupna struja u kolu nula? (Nije. Postoji centrifugalna sila na slobodne elektrone, što radja e.m.s.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} \frac{m}{e} \omega^2 D^2 , \quad (6)$$

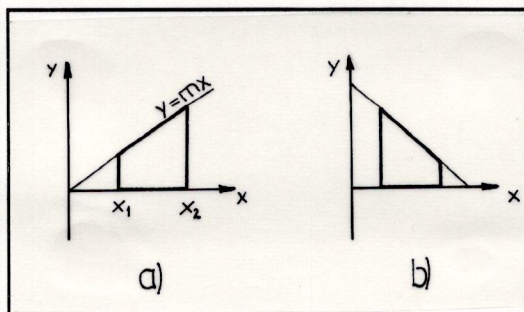
gde je  $m$  masa a  $e$  naelektrisanje elektrona. Dakle, u kolu postoji i struja jačine

$$i_{H=0} = \frac{1}{4} \frac{m}{e} \frac{\omega^2 D^2}{R} . \quad (7)$$

Pozitivni smer ove struje je od periferijske tačke P ka centralnoj C, ali joj je intenzitet zanemarljiv za naše brojne vrednosti, što će čitalac proveriti; pročitaajte u udžbeniku paragraf §69.)

### 46.

a) Nadjite magnetski fluks  $\Phi_1$  magnetske indukcije pravog, dugog provodnika sa strujom  $i$  kroz ravnu figuru sa Slike 46 (skica a). b) Potom nadjite fluks  $\Phi_2$  kroz figuru sa skice b iste slike, koja se dobija rotacijom prvobitne figure oko ose paralelne provodniku (na rastojanju  $(x_1 + x_2)/2$ ) za ugao  $180^\circ$ . c) Uporedite izračunate flukseve; nadjite  $\Phi_2/\Phi_1$  ako je  $x_1 = 1$  cm,  $x_2 = 2,718$  cm.



Slika 46

#### Rešenje

Rešimo prvo ovakav opšti zadatak. Ravnu figuru čine deo  $x$  ose od  $x_1$  do  $x_2$ , ordinate  $y(x_1)$  i  $y(x_2)$  i kriva linija  $y(x)$ . Tada je  $B(x) = \mu_0 i / 2\pi x$ , a  $dS = y dx$ , tj.  $d\Phi = B(x) y dx$ . Zato je

$$\Phi = \int_S B(x) dS , \quad (1)$$

odnosno,

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} y(x) \frac{dx}{x} . \quad (2)$$

a) U prvom slučaju, jednačina prave je  $y = mx$ , pa imamo

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} m \Delta x , \quad (3)$$

gde je  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

b) U drugom slučaju, gornja stranica trapeza je deo prave linije  $y = -mx + m(x_2 + x_1)$ . Zato je

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} m \int_{x_1}^{x_2} \left( -1 + \frac{x_1 + x_2}{x} \right) dx, \quad (4)$$

što posle integracije daje

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 i m}{2\pi} \left[ -\Delta x + (x_2 + x_1) \ln \left( \frac{x_2}{x_1} \right) \right]. \quad (5)$$

Ovu relaciju možemo svesti na oblik  $\Phi_2 = \eta \Phi_1$ , gde je

$$\eta = \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \ln \left( \frac{x_2}{x_1} \right) - 1. \quad (6)$$

c) Za date brojne vrednosti nalazimo  $\eta \simeq 1,164$ .

#### Pitanja i komentari

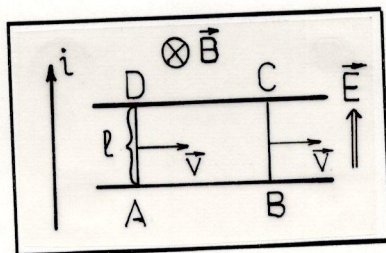
Gledajući rezultat pod *c* vidimo da je  $\Phi_2/\Phi_1 > 1$ . To se moglo i očekivati (zašto?). Ipak, pokažite da je uvek, pod datim uslovima u našem zadatku,  $\eta > 1$ .

Kad  $m \rightarrow 0$ , očevidno bi moralo da važi  $\Phi_2 \rightarrow \Phi_1$  (jer se figure *a* i *b* tada iščezavajuće malo razlikuju). Pokažite i ovu osobinu.

Ako se struja uspostavlja od nule do vrednosti *i*, kroz koje kolo, *a* ili *b*, će proteći više naelektrisanja? (Odgovor:  $q_a < q_b$ ; odnos ove dve veličine takodje je jednak funkciji  $\eta$ ; obrazložite.)

#### 47.

Kroz pravolinijski provodnik, beskonačne dužine, protiče struja konstantne jačine  $i = 1 \text{ A}$  (videti Sliku 47). U jednoj od ravni koja sadrži provodnik nalaze se provodne šine na međusobnom rastojanju  $\ell = 0,2 \text{ m}$ . Niz šine se kreću dva provodnika brzinom  $v = 10 \text{ m/s}$  koja je normalna na provodnik sa strujom. Međusobno rastojanje između provodnika je konstantno i iznosi  $d = 1 \text{ m}$ . Ako su šine i pokretni provodnici napravljeni od materijala podužnog otpora  $\rho = 1,5 \Omega/\text{m}$ , naći jačinu struje u pokretnoj konturi u trenutku  $t = 20 \text{ s}$  od početka kretanja, ako se u početnom trenutku  $t = 0$  prva šipka nalazila na rastojanju  $a = 0,1 \text{ m}$  od provodnika sa strujom. Pojavu samoindukcije ne uzimati u obzir.



Slika 47

## Rešenje

Ako sa  $x$  označimo normalno rastojanje od provodnika sa strujom tada je intenzitet magnetske indukcije

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}, \quad (1)$$

dok pravac i smer ovog vektora odgovaraju negativnom smeru  $z$  ose tj.  $\vec{B} = -B \vec{e}_z$ . Odavde, nalazimo električno polje u sistemu vezanom za pokretni sistem

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 v i}{2\pi x} \vec{e}_y. \quad (2)$$

Sada možemo da nadujemo elektromotornu silu

$$\mathcal{E} = \oint_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (3)$$

koja se indukuje u pokretnoj konturi ABCD. Pošto su vektori  $\vec{E}$  i  $d\vec{l}$  na delovima AB i CD uzajamno ortogonalni, tada se prethodni integral, uzimajući u obzir (2) svodi na

$$\mathcal{E} = \int_0^\ell \frac{\mu_0 v i}{2\pi x_1} dy + \int_\ell^0 \frac{\mu_0 v i}{2\pi x_2} dy, \quad (4)$$

gde smo sa  $x_1$  i  $x_2$  označili trenutni položaj prve, odnosno druge pokretne šipke. Izračunavanjem zadnjeg integrala dobijamo

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 i l v}{2\pi} \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right). \quad (5)$$

Kako su  $x_1 = a + vt$  i  $x_2 = a + d + vt$  imamo konačno da je elektromotorna sila koja se indukuje u konturi

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 i l v d}{2\pi(a + vt)(a + d + vt)}. \quad (6)$$

Pošto je ukupna dužina konture kroz koju teče struja jednaka  $2(\ell + d)$  imamo da je otpor konture

$$R = 2\rho(\ell + d). \quad (7)$$

Izrazi (6) i (7) konačno daju intenzitet struje koja protiče kroz konturu

$$I = \frac{\mu_0 i \ell v d}{4\pi(\ell + d)(a + vt)(a + d + vt)}. \quad (8)$$

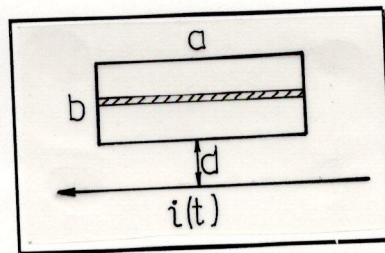
Zamenjujući brojne vrednosti dobijamo  $I = 4,14 \cdot 10^{-12}$  A.

Pitanja i komentari

Ako je u zadatku dat koeficijent samoidukcije  $L$  pokretne konture napisati diferencijalnu jednačinu za jačinu struje u konturi uzimajući u obzir elektromotornu silu samoindukcije.

48.

Kroz pravolinijski provodnik beskonačne dužine protiče struja promenljive jačine  $i(t) = i_0 - At$ . Na rastojanju  $d$  od provodnika (Slika 48) nalazi se pravougaona strujna kontura dimenzija  $a \times b$ . Ako je koeficijent samoindukcije ove strujne konture  $L$ , a njena otpornost  $R$  naći zakon promene  $I(t)$  za jačinu struje u konturi.



Slika 48

Rešenje

Intenzitet magnetske indukcije  $\vec{B}$  koju daje pravolinijski provodnik sa strujom na rastojanju  $x$  od provodnika iznosi

$$B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi x}, \quad (1)$$

a sam vektor  $\vec{B}$  normalan je na ravan konture, pa je elementaran fluks  $d\Phi(t) = \vec{B} \cdot d\vec{S}$  koji stvara provodnik sa strujom kroz površinu  $dS = a dx$ ,

u trenutku  $t$

$$d\Phi = \frac{\mu_0 a i(t)}{2\pi x} dx. \quad (2)$$

Integracijom zadnjeg izraza u odgovarajućim granicama

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 a i(t)}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{dx}{x}, \quad (3)$$

dobijamo ukupan fluks kroz konturu (koji potiče od provodnika sa strujom  $i(t)$ ) kao funkciju vremena

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 a i(t)}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{b}{d} \right). \quad (4)$$

Na osnovu izraza za indukovanu elektromotornu silu  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$  imamo

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 a A}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{b}{d} \right). \quad (5)$$

gde smo iskoristili činjenicu da je  $di(t)/dt = -A$ . Izraz (5) važi za interval vremena  $0 < t < t_1 = i_0/A$ , tj. samo za vreme dok kroz pravolinijski provodnik protiče struja. Sada, uzimajući u obzir elektromotornu silu samoindukcije, za datu strujnu konturu možemo napisati Omov zakon u obliku

$$\frac{\mu_0 a A}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{b}{d} \right) - L \frac{dI}{dt} = IR. \quad (6)$$

Dobili smo diferencijalnu jednačinu prvog reda koja se može rešiti razdvajanjem promenljivih. Rešavanjem dobijamo

$$I(t) = \frac{\mu_0 a A}{2\pi R} \ln \left( 1 + \frac{b}{d} \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{R}{L} t \right) \right], \quad (7)$$

gde smo iskoristili početni uslov  $I(0) = 0$ . Struja  $I(t)$  u konturi, menja se po ovom zakonu do trenutka  $t_1 = i_0/A$ , kada iznosi

$$I(t_1) = \frac{\mu_0 a A}{2\pi R} \ln \left( 1 + \frac{b}{d} \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{R i_0}{L A} \right) \right]. \quad (8)$$

Posle ovog trenutka tj. za  $t > t_1$ , imamo da je  $i(t) = 0$  što znači da je elektromotorna sila koja potiče zbog promene struje kroz pravolinijski provodnik



jednaka nuli pa od ovog trenutka u konturi deluje samo elektromotorna sila samoindukcije  $-Ldi/dt$ . Za ovaj interval Omov zakon

$$-L \frac{dI}{dt} = IR, \quad (9)$$

daje

$$I(t) = \frac{\mu_0 a A}{2\pi R} \ln \left( 1 + \frac{b}{d} \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{Ri_0}{LA} \right) \right] \exp \left( -\frac{R}{L}t \right), \quad (10)$$

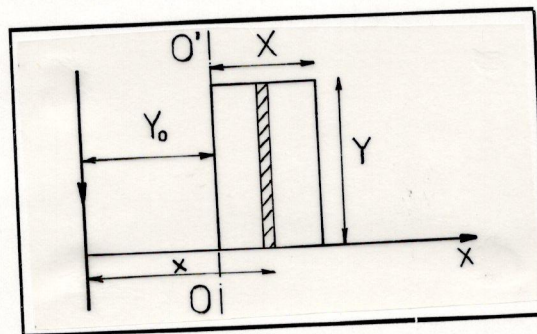
gde smo iskoristili (8) kao početni uslov.

**Pitanja i komentari**

Neka u konturi sa Slike 48 deluje izvor konstantne elektromotorne sile  $\mathcal{E}_1$  i unutrašnjeg otpora  $r$ . Kako glasi zakon promene  $I(t)$  za jačinu struje u konturi u ovom slučaju?

**49.**

Od bakarne žice prečnika  $d$  napravljena je ravna, pravougaona kontura površine  $S = XY$ . Postavljena je u okolini pravog provodnika sa strujom (Slika 49) jačine  $i$ . Stranica  $Y$  paralelna je provodniku, a  $Y_0 > X$ . Okrenimo konturu za  $180^\circ$  oko ose  $OO'$ . a) Kolika količina elektriciteta  $q$  je protekla kroz neki presek žice u toku procesa rotacije? b) Izračunati  $q$  ako je  $d = 1 \text{ mm}$ ,  $Y_0 = 3 \text{ cm}$ ,  $X = 1,386 \text{ cm}$ ,  $Y = 5 \text{ cm}$ , i  $i = 17 \text{ A}$ .



Slika 49

**Rešenje**

Neka je pozitivna normala konture usmerena od posmatrača ka ravni crteža. Za usvojeni smer struje, magnetski fluks kroz površinu  $dS = Y dx$  biće

$$d\Phi = -B(x) dS = -B(x) Y dx. \quad (1)$$

Znamo da je  $B(x) = \mu_0 i / 2\pi x$ , pa je

$$d\Phi = -\frac{\mu_0 i Y}{2\pi} \frac{dx}{x}. \quad (2)$$

Ukupan fluks nalazimo integracijom

$$\Phi = -\frac{\mu_0 i Y}{2\pi} \int_{Y_0}^{Y_0+X} \frac{dx}{x}. \quad (3)$$

Integral je tablični i odmah nalazimo

$$\Phi = -\frac{\mu_0 i Y}{2\pi} \ln \left( \frac{Y_0 + X}{Y_0} \right). \quad (4)$$

U novom položaju, fluks kroz konturu iznosi

$$\Phi_k = \frac{\mu_0 i Y}{2\pi} \int_{Y_0-X}^{Y_0} \frac{dx}{x}, \quad (5)$$

odnosno posle integracije

$$\Phi_k = \frac{\mu_0 i Y}{2\pi} \ln \left( \frac{Y_0}{Y_0 - X} \right). \quad (6)$$

Promena magnetskog fluksa  $\Delta\Phi = \Phi_k - \Phi$  iznosi

$$\Delta\Phi = \frac{\mu_0 i Y}{2\pi} \ln \left( \frac{Y_0 + X}{Y_0 - X} \right). \quad (7)$$

Pošto je e.m.s.  $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$  i struja u kolu u procesu rotacije  $i = \mathcal{E}/R$ , protekla količina elektriciteta je  $q = \int i dt$ , što daje poznati obrazac

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R}, \quad (8)$$

gde je  $R$  otpornost kola; nju nalazimo po obrascu za otpornost žica

$$R = \rho \frac{\ell}{S}. \quad (9)$$

Dužina žice je  $\ell = 2(Y + X)$ . Ovde je  $\rho$  specifična električna otpornost žice. Smenom relacije (9) u formulu (8) dobijamo

$$q = \frac{\mu_0 i Y S}{4\pi\rho(Y + X)} \ln\left(\frac{Y_0 + X}{Y_0 - X}\right). \quad (10)$$

b) Za bakar je  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ , pa formula (10) daje  $q \simeq 61,5 \mu\text{C}$ .

Pitanja i komentari

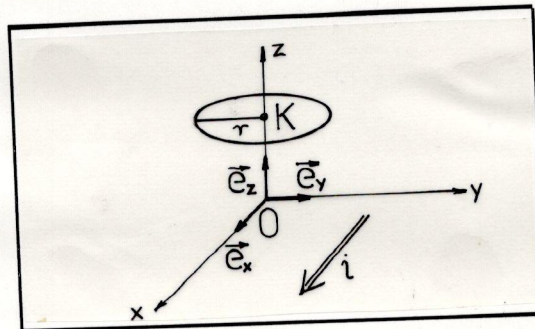
E.m.s. samoindukcije ne mora da se uzme u obzir u zadacima ovog tipa. Primena formule (8) podrazumeva stanja u kojima je indukovana e.m.s. u konturi jednaka nuli.

Konturu možemo, očevidno, i translatorskim pomeranjem za dužinu  $X$  približiti provodniku. Ostaje li  $q$  isto i u tom slučaju?

Nadjite  $Q_{90^\circ}$ , protoklo naelektrisanje kada konturu zarotiramo za  $90^\circ$ . Možete li, u tom slučaju, ukazati na metod da se izmeri magnetska indukcija oko provodnika? (Uputstvo: Uzeti  $X < Y_0$  i  $\Phi = B(x)XY$ , pa je  $\Delta\Phi = \Phi R Q_{90^\circ}$ , tj.  $B(x) = R Q_{90^\circ}/XY$ . Završite račun.)

50.

Strujni plašt, koji smo poistovetili sa  $xOy$  ravni na Slici 50 nosi struju podužne gustine  $\vec{i} = i_y \vec{e}_x$ . Iznad strujnog plašta, sa centrom u tački  $K(0, 0, p)$ , nalazi se kružna strujna kontura radijusa  $r$ , u superprovodnom stanju. Na početku, ravan konture paralelna je  $xOy$  ravni. Onda je kontura, rotacijom oko tačke  $K$  dovedena u  $xOz$  ravan. a) Kolika je jačina struje  $I$  u superprovodnoj konturi? b) Izračunati  $I$  ako je  $r = 1 \text{ cm}$ ,  $i_y = 10^5 \text{ A/m}$ , a koeficijent samoindukcije konture  $L = 10^{-4} \text{ H}$ .



Slika 50

## Rešenje

a) U blizini strujnog plašta, s gornje strane ( $z > 0$ ) postoji polje indukcije  $\vec{B} = -\frac{1}{2}\mu_0 i_y \vec{e}_y$ , što smo objašnjavali u zadatku 12. Pri kretanju konture, indukuje se u njoj struja jačine

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

U superprovodnom stanju, otpornosti nema,  $R = 0$ . Ali, to znači da mora biti i  $d\Phi/dt = 0$ , u protivnom bi struja bila beskonačna. Prema tome, premeštanje konture praćeno je konzerviranjem fluksa kroz konturu:

$$\Phi_1 = \text{const}. \quad (2)$$

Na početku, fluks je bio jednak nuli. On mora zadržati nultu vrednost i na kraju:

$$\Phi_2 = 0. \quad (3)$$

Ovo znači da se sopstveni fluks konture  $\Phi_2'$  i fluks polja strujnog plašta  $\Phi_2''$  medjusobno poništavaju:

$$\Phi_2 = \Phi_2' - \Phi_2'' = 0. \quad (4)$$

Znamo da je

$$\Phi_2' = LI, \quad (5)$$

gde je  $L$  koeficijent samoindukcije superprovodne konture. Pošto je, po modulu

$$\Phi_2'' = \pi r^2 \frac{1}{2} \mu_0 i_y, \quad (6)$$

lako nalazimo imajući u vidu relacije (4) i (5)

$$I = \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{r^2}{L} i_y. \quad (7)$$

b) Izračunavanje brojne vrednosti za struju u konturi daje  $I \simeq 0,2 \text{ A}$ .

## Pitanja i komentari

Na početku je fluks bio ravnomerno raspodeljen po površini konture. Na kraju, to već nije tako. Ali, ukupni fluks se održava, premda dolazi do preraspodele silnica ukupnog magnetskog polja kroz konturu. Na primer,

*Elektromagnetska indukcija*

prvo je magnetska indukcija u tački K iznosila  $B_1 = \mu_0 i_y / 2$ . Na kraju, u toj tački imamo indukciju  $B_2 = B_1 - \mu_0 I / 2r$ , tj.

$$B_2 = \frac{1}{2} \mu_0 i_y - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{1}{r} \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{r^2}{L} i_y, \quad (8)$$

odnosno posle sredjivanja

$$B_2 = \frac{1}{2} \mu_0 i_y \left( 1 - \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{r}{L} \right). \quad (9)$$

Za naše brojne vrednosti, koji je smer indukcije  $\vec{B}_2$ ? Može li uopšte rezultantna magnetska indukcija u centru konture promeniti smer posle opisanog pomeranja?

Na osnovu razrade ovog zadatka pokušajte da se vratite razmatranju situacije opisane u zadatku 49. Da li je sasvim tačno da opterećenje  $q$  ne zavisi od koeficijenta samoindukcije?



## GLAVA PETA

## ENERGIJA MAGNETSKOG POLJA

## 51.

Superprovodni magnet proizvodi magnetsko polje indukcije  $B = 5 \text{ T}$  u radnoj zapremini  $V = 1 \text{ m}^3$ . Izračunati ukupnu magnetsku energiju. Da li je tačan podatak da bi se tom energijom moglo zagrejati  $m = 250 \text{ kg}$  bakra sa temperature  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  do  $t = 100^\circ\text{C}$ ?

## Rešenje

Gustina energije magnetskog polja data je poznatim izrazom

$$w = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2. \quad (1)$$

Ako se magnetsko polje formira u vazduhu koji je paramagnetik magnetske susceptibilnosti  $\kappa = 3,8 \cdot 10^{-7}$ , možemo uzeti da je  $\mu \simeq 1$  i stoga

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (2)$$

Ukupna energija u zapremini  $V$  biće  $W = \int_V w \, dV$  tj.

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, dV. \quad (3)$$

Za procenu, uzmimo da je  $B \simeq \text{const}$  u datoj zapremini. Stoga je

$$W \simeq \frac{B^2}{2\mu_0} V. \quad (4)$$

Energetski sadržaj raste s kvadratom magnetske indukcije i proporcionalan je radnoj zapremini magneta.

Zamena posebnih vrednosti daje  $W \simeq 10^7 \text{ J}$ . Vidimo da se u radu sa superprovodnim kalemovima mora računati na impozantne magnetske energije.

Da se zagreje masa  $m$  za temperaturski interval  $\Delta t$  mora se obezbediti energija

$$Q = mc\Delta t. \quad (5)$$

Za bakar je specifična toplota  $c = 380 \text{ J/kgK}$  pa je  $Q \simeq 0,95 \cdot 10^7 \text{ J}$ , što je približno rezultatu za magnetsku energiju.

#### Pitanja i komentari

Klasični elektromagneti, pomoću struja od nekoliko desetina ampera, daju polja veličine do  $5 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ . Polja jača od ovih zovu se *superjaka* magnetska polja.

Konstantna superjaka polja mogu se dobiti dvojako. 1) Solenoidi hladjeni destilovanom vodom dopuštaju struje napajanja od više stotina ampera, te se tako formiraju polja i do  $24 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ . 2) Superprovodni solenoidi (na primer od niobijum-titana ili niobijum-olova) koji rade na temperaturi tečnog helijuma daju  $H \sim 12 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ .

Impulsna superprovodna polja su znatno veća, ali kratko traju. Prva mogućnost kreiranja impulsnih magnetskih polja sastoji se u tome da se kroz kalem, otporan na elektrodinamičke sile, propušta pražnjenje iz baterije kondenzatora velikog kapaciteta. U maksimumu, takva polja će ići i do  $40 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ . Druga se mogućnost sastoji u kompresiji magnet-skog fluksa: impulsno magnetsko polje dovodi se u pogodnom trenutku, sužavanjem solenoida kumulativnom implozijom, u zapreminu dijametara nekoliko milimetara i time se kreiraju polja do vrednosti  $8 \cdot 10^8 \text{ A/m}$ . Takva polja traju nekoliko mikrosekundi. Kalem mora izdržati pritiske i do nekoliko miliona atmosfera (proverite podatak).

S druge strane, zanimljivo je znati i za primere izvredno malih magnetskih polja. Poznato je da se na nekoliko centimetara od grudi čoveka mogu detektovati karakteristična magnetska polja srčane aktivnosti. Ona su reda veličine  $8 \cdot 10^{-6} \text{ A/m}$ . Aktivnosti mozga daju  $H \sim 8 \cdot 10^{-7} \text{ A/m}$ . Bez obzira na ove ekstremno niske vrednosti, danas se prave uspešni *magnetokardiogrami*. Razvija se i *magnetoencefalografija*. Te perspektivne medicinske metode poželjne su kao rana beskontaktna dijagnostika unutrašnjosti organizma.

Tako, naučne i istraživačke aktivnosti zahtevaju razvijanje merne i druge tehnologije za uspešno savladjivanje magnetskih polja u rasponu od  $8 \cdot 10^{-7} \text{ A/m}$  do  $8 \cdot 10^8 \text{ A/m}$  (petnaest redova veličine).

---

#### 52.

---

Odrediti energiju magnetskog polja, po jedinici dužine, u prostoru oko beskonačnog, pravog, tankog provodnika sa strujom jačine  $i$ .



## Rešenje

Jačina magnetskog polja datog provodnika, u tački na rastojanju  $r$  od provodnika, iznosi (kao što smo ustanovili u zadatku 1)

$$H = \frac{i}{2\pi r}. \quad (1)$$

Gustina energije magnetskog polja je na tom mestu

$$w = \frac{1}{2} \mu_0 H^2, \quad (2)$$

gde je  $\mu_0$  magnetska konstanta. Ukupna magnetska energija je onda

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\tau} H^2 d\tau, \quad (3)$$

gde se integrira po celom prostoru s magnetskim poljem. Poslužimo li se cilindričnim koordinatama, što je u ovom zadatku prirodno, za element zapremine (po jedinici dužine) koristićemo izraz

$$d\tau' = 2\pi r dr. \quad (4)$$

Smenom (1) i (4) u (3) dobijamo energiju po jedinici dužine

$$W' = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{2\pi i^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} dr. \quad (5)$$

Vidimo da je energija proporcionalna integralu  $\int dr/r$  koji divergira u datim granicama. Prema tome u zadatku kako smo ga mi ovde formulisali izlazi da je ukupna magnetska energija po jedinici dužine provodnika (ili možemo reći linijska gustina magnetske energije) beskonačna.

## Pitanja i komentari

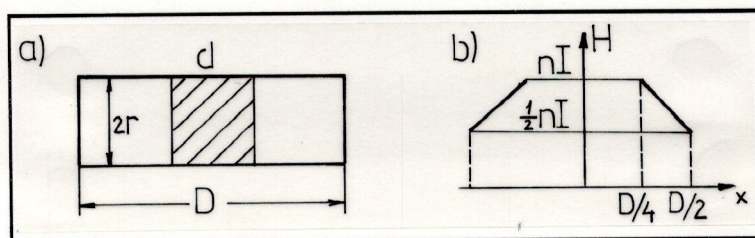
Singularitet  $r \rightarrow 0$  možemo eliminisati imajući u vidu konačnu debljinu provodnika (okolnost koju smo analizirali u zadatku 10). Ali, teškoću pričinjava i granica  $r \rightarrow \infty$ . Vidimo, da se upravo zbog toga suočavamo sa rezultatom  $W \rightarrow \infty$ . Može li se prihvatiti beskonačna magnetska energija kao smislen fizički rezultat? U čemu je teškoća, zašto se javlja beskonačnost? Koja vrsta uproščavanja uslova zadatka dovodi do paradoksalnog ishoda?

Kako reformulisati zadatak s ciljem da se dobije realniji opis fizičke suštine formiranja magnetske energije u prostoru oko provodnika?

Primitite da slične teškoće postoje i pri izračunavanju električne energije oko naelektrisanе niti, na primer. Posebno je intrigirajući singularitet električne energije oko tačkastog naelektrisanja. On je tu u najdubljoj vezi sa nekim fundamentalnim problemima fizike (klasičan pregled te oblasti čitalac će naći u Fejnmanovim predavanjima iz fizike (šesta knjiga: elektrodinamika; glava 28: elektromagnetska masa)).

## 53.

Dat je solenoid dužine  $D$ , poluprečnika  $r$ . a) Proceniti kolika je energija magnetskog polja  $W$  u centralnom delu dužine  $d = D/2$  (šrafirani deo na Slici 53, skica a). b) Izračunati  $W$  ako je  $D = 20$  cm i  $r = 2,5$  cm. Kroz solenoid teče struja jačine  $I = 1$  A a namotano je 10 navoja po centimetru dužine.



Slika 53

## Rešenje

a) Ako je poznata jačina magnetskog polja u svim tačkama date zapremine  $\tau$  može se naći ukupna magnetska energija u toj zapremini preko integrala gustine

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\tau} H^2 d\tau. \quad (1)$$

Jačina magnetskog polja u veoma dugom solenoidu (uzećemo da je naš slučaj obuhvaćen ovom aproksimacijom) nalazi se pomoću izraza

$$H = B/\mu_0 = nI, \quad (2)$$

gde je  $n$  broj navoja po jedinici dužine solenoida.

Ovo polje je homogeno te imamo prosto za zapreminu

$$\tau = \pi r^2 d, \quad (3)$$

i energiju

$$W = \frac{\pi}{4} \mu_0 n^2 I^2 r^2 D. \quad (4)$$

Smenom brojnih vrednosti nalazimo  $W \simeq 1,2 \cdot 10^{-4}$  J.

#### Pitanja i komentari

Da procenimo ukupnu energiju u solenoidu, primenimo neku razumnu aproksimaciju za profil magnetskog polja. Na primer, znamo da je na krajevima  $H = nI/2$ . To daje dobru osnovu da se primeni u prvom koraku linearna aproksimacija skicirana pod *b* na Slici 53. Iskoristite izraz (1) da okončate potrebna izračunavanja, pošto prethodno odredite jednačinu prave na segmentu od  $D/4$  do  $D/2$ . (Rešenje: Izrazu (4) treba dodati još  $7/12 W$ ; prema tome, ukupna energija solenoida je  $W_{sol} = 1,9 \cdot 10^{-4}$  J.)

U stvari, mi već znamo kako se menja jačina polja po osi solenoida (zadatak 13). Zanimajući radijalnu varijaciju jačine, taj izraz nam omogućava da na finiji način pristupimo nalaženju magnetske energije:

$$W_{sol}^{(num)} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{j_\ell^2}{4} \int_0^D \left[ \frac{x/r}{\sqrt{1 + (x/r)^2}} - \frac{(x-D)/r}{\sqrt{1 + [(x-D)/r]^2}} \right]^2 \pi r^2 dx. \quad (6)$$

Integral se može svesti na oblik  $\pi r^2 D J_1$ , gde je

$$J_1 = \int_0^1 \left[ \frac{kp}{\sqrt{1 + (kp)^2}} - \frac{(p-1)k}{\sqrt{1 + [(p-1)k]^2}} \right]^2 dp, \quad (7)$$

novi integral u kojem figurišu skraćeni  $p = x/D$  i  $k = D/r$ . Na taj način imamo

$$W_{sol}^{(num)} = \frac{1}{2} W J_1. \quad (8)$$

Pošto je u našem zadatku  $k = 20/2,5 = 8$  našli smo numerički da je  $J_1 = 3,17409$ . Odmah potom izračunavamo  $W_{sol}^{(num)} = 1,9 \cdot 10^{-4}$  J. Praktično, dobija se rezultat kao i malo pre sa linearnom aproksimacijom:  $W_{sol}^{(num)} \simeq W_{sol}$ .

#### 54.

Kroz pravi provodnik kružnog poprečnog preseka poluprečnika  $R$  teče struja jačine  $I$ . a) Odrediti magnetski fluks  $\Phi$  kroz polovinu osnog preseka provodnika, na dužini  $\ell$ . b) Izračunati  $\Phi$  ako je  $I = 10$  A i  $\ell = 10$  m. c) Odrediti magnetsku energiju  $W$  sadržanu u zapremini  $V = \pi R^2 \ell$ . d) Izračunati  $W$  sa podacima iz tačke b).

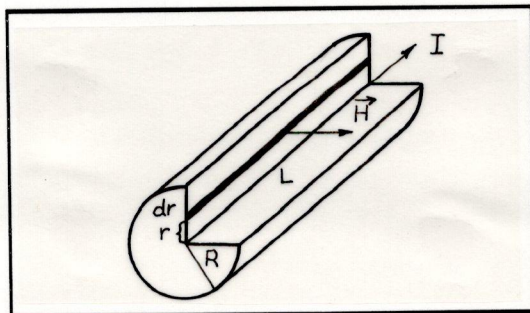
## Rešenje

a) Fluks ćemo naći primenjujući formulu

$$\Phi = \int_S B_n dS. \quad (1)$$

Za elementat površine pogodno je izabrati (šrafirani deo na Slici 54)

$$dS = \ell dr. \quad (2)$$



Slika 54

Na rastojanju  $r$  od ose provodnika magnetska indukcija je

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \frac{r}{R}, \quad (3)$$

(videti zadatak 10). Na taj način, za elementarni fluks možemo pisati

$$d\Phi = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \frac{r}{R} \ell dr, \quad (4)$$

jer je normalna komponenta magnetske indukcije,  $B_n$ , prosto jednaka celoj veličini  $B$  ( $\vec{B}$  i  $d\vec{S}$  su kolinearni vektori). Sada, kombinujući (4) i (1) imamo

$$\Phi = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi R^2} \int_0^R r dr = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi} I. \quad (5)$$

b) Izračunavanje daje  $\Phi = 10^{-5}$  Wb. Uverite se da je zaista *amper*  $\times$  *henri* = *veber*.

c) Ukupnu magnetsku energiju ćemo tražiti polazeći od formule

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV. \quad (6)$$

Pošto je  $dV = 2\pi r \ell dr$  a  $B(r)$  je određeno jednačinom (3), biće

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^R \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right)^2 r^2 2\pi r \ell dr. \quad (7)$$

Radi kraćeg pisanja uvedimo oznaku  $W_0 = \mu_0 I^2 \ell / 4\pi$ . Tada je

$$W = W_0 \int_0^1 \zeta^3 d\zeta. \quad (8)$$

gde je  $\zeta = r/R$ . Vrednost integrala je  $1/4$ . Tako je definitivno

$$W = \frac{1}{4} W_0. \quad (9)$$

d) Izračunavanje po formuli (9) daje  $W = 25 \mu\text{J}$ .

#### Pitanja i komentari

Formula (5) pokazuje da  $\Phi$  ne zavisi od poluprečnika cilindra  $R$ . Prema relaciji (9), ni  $W$  ne zavisi od  $R$ . Postoji li očevidan fakt da to mora tako biti?

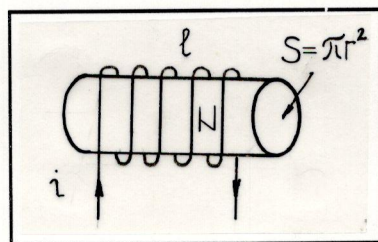
Ako primenimo formulu  $\Phi = LI$ , a imamo u vidu našu jednačinu (5), nalazimo induktivnost provodnika po jedinici dužine  $L_\ell^\Phi = \mu_0/4\pi$ . Međutim, ako radimo primenom relacije za sopstvenu energiju struje i koristimo našu relaciju (9), tada je  $L_\ell^W = \mu_0/8\pi$ . Vidimo,  $L_\ell^\Phi \neq L_\ell^W$ . Otkuda razlika? Koji je postupak tačan? (Odgovor: Energetska definicija koeficijenta samoindukcije daje tačan rezultat; izračunavanje preko fluksa dobro je samo za slučaj beskonačno tankih provodnika; u suprotnom, nije moguće jednoznačno definisati konturu.)

---

### 55.

---

Dugi solenoid (Slika 55) ima  $N$  navoja. Površina poprečnog preseka solenoida je  $S = \pi r^2$  a dužina  $\ell$ . a) Izučiti mehaničke sile kad solenoidom teče struja jačine  $i$ . b) Izračunati sile ako je  $i = 1000 \text{ A}$ ,  $\ell = 1 \text{ m}$ ,  $r = 0,1 \text{ m}$  i  $N = 1000$  navoja.



Slika 55

## Rešenje

a) Pri sporoj deformaciji, rad ponderomotornih sila iznosi

$$\delta A = \frac{1}{2} i^2 dL. \quad (1)$$

Induktivnost solenoida izračunava se po formuli (za vakuum)

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \quad (2)$$

Posmatrajmo prvo mogućnost deformacije solenoida samo u odnosu na parametar  $l$ , tj. smatrajući da je  $S = \text{const}$ . Tada je, očevidno

$$dL = -\mu_0 \frac{N^2 S}{l^2} dl. \quad (3)$$

Pri tom je rad sila

$$\delta A = F_l dl. \quad (4)$$

Ove relacije odmah daju za podužnu silu

$$F_l = -\frac{1}{2} \mu_0 i^2 \frac{N^2 S}{l^2}. \quad (5)$$

Ova sila teži da *sabi*je solenoid.

A sada pretpostavimo da se dužina solenoida ne može menjati, tj. da je u toku deformacije  $l = \text{const}$ . Tada ostaje mogućnost da se menja površina poprečnog preseka solenoida, tj. parametar  $r$ . Dobićemo

$$dL = \mu_0 \frac{N^2}{l} dS, \quad (6)$$

$$dS = 2\pi r dr. \quad (7)$$

Kako je u ovom slučaju

$$\delta A = F_r dr, \quad (8)$$

lako nalazimo i radijalnu silu

$$F_r = \pi i^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} r. \quad (9)$$

Ona teži da *poveća* poluprečnik.

b) Procenimo veličine ovih sila:

$$F_\ell \simeq 2 \cdot 10^4 \text{ N}, \quad F_r \simeq 4 \cdot 10^5 \text{ N}. \quad (10)$$

Kao što vidimo, ponderomotorne sile mogu biti i veoma velike.

#### Pitanja i komentari

Količnik  $F_\ell/S$  predstavlja podužni pritisak  $p_\ell$ . Ako je  $P = 2\pi r\ell$  površina omotača solenoida, tada je  $F_r/P$  bočni pritisak  $p_r$ . Pokazati da je

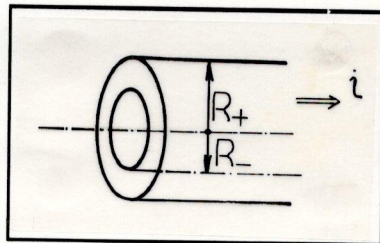
$$p_\ell = p_r = \frac{1}{2} \mu_0 H^2, \quad (11)$$

gde je  $H$  jačina magnetskog polja solenoida ( $H = Ni/\ell$ ). Pritisci su brojno jednaki gustini magnetske energije solenoida.

Pokušajte da formulišete elementarne argumente, zašto su sile baš takve da teže da skrate dužinu i povećaju prečnik solenoida.

### 56.

Posmatrajmo Sliku 56. Duž šupljeg cilindra (spoljašnji poluprečnik  $R_+$ , unutrašnji  $R_-$ ) teče struja jačine  $i$ . a) Javlja li se pritisak  $p$  na zid cilindra, i kakav? b) Izračunati  $p$  ako je  $i = 1,76 \cdot 10^6 \text{ A}$  i  $R_+ = 10 \text{ cm}$ . Napomena: Smatrati da je  $d = R_+ - R_- \ll R_+$ .



Slika 56

#### Rešenje

a) Magnetsku indukciju  $B_+$  na spoljašnjoj površini cilindra naći ćemo pomoću teoreme o magnetskom naponu

$$\oint_{(\ell)} \vec{B}_+ \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (1)$$

Linijski integral se uzima po obimu  $2\pi R_+$ , a površinski po poprečnom preseku  $\pi R_+^2$ . Očevидno, simetrija zadatka obezbeđuje da prvi integral lako nalazimo; vrednost mu je  $B_+ 2\pi R_+$ . Takodje, odmah izračunavamo i drugi integral i on je prosto jednak ukupnoj struji cilindra  $i$ . Prema tome je

$$B_+ = \frac{\mu_0 i}{2\pi R_+}. \quad (2)$$

Na sličan način se uveravamo da je magnetska indukcija na unutrašnjoj površini cilindra,  $B_-$ , jednaka nuli.

Označimo sa  $i_\ell$  linijsku gustinu struje  $i_\ell = i/(2\pi R_+)$ . Ako je  $d\vec{S}_1$  element površine cilindra, tada je  $i_\ell d\vec{S}_1$  površinski strujni elemenat. On je jednak zapreminskom strujnom elementu

$$\vec{i}_\ell dS_1 = \vec{j} dV. \quad (3)$$

Na svaku naelektrisanu česticu koja učestvuje u formiranju struje deluje magnetska sila. Ta se sila predaje provodniku kao celini (ona se često zove *Amperova sila*). Magnetsko polje deluje silom  $i$  na sam provodnik koji generiše to magnetsko polje. Neka je  $\rho$  zapreminska gustina naelektrisanja. Na zapreminski elemenat  $dV$  deluje sila  $d\vec{F} = \rho\vec{u} \times \vec{B} dV$  i pošto je  $\vec{j} = \rho\vec{u}$ , biće  $d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} dV$ . S obzirom na relaciju (3), nalazimo

$$d\vec{F} = -|\vec{i}_\ell \times \vec{B}| d\vec{S}_1 = -|\vec{i}_\ell \times \vec{B}^*| d\vec{S}_1. \quad (4)$$

Da izbegnemo konfuziju, ovde smo upotrebili oznaku  $\vec{B}^*$ . To je magnetska indukcija na mestu datog strujnog elementa, koja potiče od svih drugih elemenata. Veoma blizu površinske struje (videti zadatak 12) postoji magnetska indukcija  $B_1 = \mu_0 i_\ell / 2$ . Da bi ukupna indukcija zadovoljavala izraz (2), moramo uzeti da je

$$\vec{B}^* = \frac{1}{2} \vec{B}_+. \quad (5)$$

Zamenimo ovaj rezultat u izraz (4); dobijamo za pritisak:

$$\frac{d\vec{F}}{dS_1} = -\frac{1}{2} i_\ell B_+ \vec{e}_r. \quad (6)$$

Ovde je  $\vec{e}_r$  ort spoljašnje normale na cilindar. Dakle,

$$p = \frac{\mu_0}{2} \frac{i^2}{(2\pi R_+)^2}. \quad (7)$$



Vidimo da na cilindar sa strujom deluje bočni pritisak, usmeren ka osi cilindra.

b) Izračunajmo brojnu vrednost za pritisak  $p = 0,5 \cdot 10^7$  Pa. Megaamperske struje daju znatne pritiske u posmatranom cilindru; oni dosežu desetine i stotine atmosfera.

**Pitanja i komentari**

Pokažite da se formula (7) može napisati i u obliku

$$p = \frac{B_+^2}{2\mu_0}. \quad (8)$$

Ovo je ujedno i poznati izraz za gustinu magnetske energije.

Ne odveć strogo rezonujući, zadatak smo mogli rešavati ovako: cilindar shvatimo kao kontinuirani skup pravih provodnika dužine  $L$  poprečnog preseka  $(R_+ - R_-)d\ell$ . Jačina struje u jednom od njih je  $i_1 = i_\ell d\ell$ . Sila na taj provodnik u nekom srednjem magnetskom polju  $B_{sr} = B_+/2$  biće  $dF = i_1 L B_+/2$ . Pritisak je  $(dF/Ld\ell) = i_\ell B_+/2$  što odmah daje rezultat (7).

U mnogim i raznovrsnim problemima fizike mora se voditi računa o pritisacima tipa (8) (na primer ponašanje snopova u jonskoj optici, konfiniranje pražnjenja u fizici plazme i slično).

Kakve pritiske treba očekivati ako je struja azimutalna, tj. teče po obimu cilindra? Povežite ovo sa naponima koji se javljaju u solenoidu.

**57.**

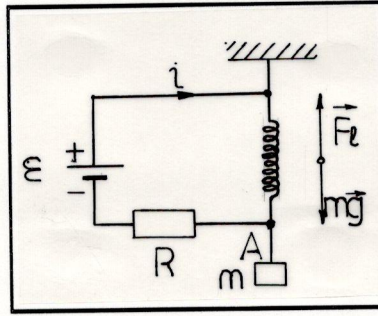
Od izolovane žice napravljena je opruga dužine  $\ell_0$  i poprečnog preseka  $S$ , konstante elastičnosti  $k_0$ . a) Kako će se promeniti osobine opruge ako kroz nju, kao kroz solenoid sa  $N$  navoja, protiče struja jačine  $i$ ? b) Izračunati za koliko će se izdužiti opruga ako se optereti tegom mase  $m = 0,1$  kg i ako je  $S = 3 \text{ cm}^2$ ,  $N = 300$ ,  $i = 30$  A,  $\ell_0 = 30$  cm i  $k_0 = 20$  N/m. Uzeti da je ubrzanje  $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$ .

**Rešenje**

a) U jednom prethodnom zadatku (videti zadatak 55) objasnili smo da je podužna sila kod solenoida sa strujom

$$F_\ell = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2 i^2}{\ell_0^2} S. \quad (1)$$

Pretpostavimo da smo oprugu opteretili tegom mase  $m$  (Slika 57). Tačku A napadaju



Slika 57

dve sile suprotnog smera: težina tega  $m\vec{g}$  i magnetska sila sabijanja solenoida  $\vec{F}_\ell$ . Proces elastične deformacije opisaćemo na uobičajeni način pomoću Hukovog zakona

$$mg - F_\ell = k_0(\ell - \ell_0). \quad (2)$$

Ovu jednačinu možemo dovesti na oblik

$$mg = \frac{k_0}{1 - F_\ell/mg} (\ell - \ell_0). \quad (3)$$

Ovaj izraz možemo protumačiti kao jednačinu koja opisuje izduženje obične opruge (bez struje) neke konstante elastičnosti  $k$  :

$$mg = k(\ell - \ell_0). \quad (4)$$

Upoređujući jednačine (3) i (4) nalazimo

$$k = \frac{k_0}{1 - F_\ell/mg}, \quad (5)$$

odnosno,

$$k = k_0 / \left( 1 - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{S}{mg} \frac{N^2 i^2}{\ell_0^2} \right). \quad (6)$$

Prema tome, ako masa  $m$  izvodi harmonijske oscilacije na opruzi sa strujom, treba računati sa ekvivalentnom elastičnošću prema formuli (6).

b) Kada je opruga opterećena tegom mase  $m$ , izduženje  $\Delta\ell$  će iznositi  $\Delta\ell = mg/k$ , odnosno uzimajući u obzir relaciju (6) dobijamo

$$\Delta\ell = \frac{mg}{k_0} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{S}{k_0} \frac{N^2 i^2}{\ell_0^2}. \quad (7)$$

Izračunajmo izduženje. Dobijamo  $\Delta\ell \simeq 4,2$  cm.

## Pitanja i komentari

Zadatak smo rešavali pod pretpostavkom da su deformacije male, tj. da važi  $\Delta l \ll \ell_0$ . Da li konačne formule to potvrđuju?

Očito, menjajući struju (na primer, pomoću reostata  $R$  na Slici 57) moguće je uticati na vertikalne oscilacije opruge. Može li se ovim metodom kontrolisati parametarska rezonancija azimutalnih oscilacija?

## 58.

a) Naći koeficijent samoindukcije  $L$  kalema dužine  $\ell$ , površine poprečnog preseka  $S = \pi r^2$  i ukupnog broja navoja  $N$ , pod uslovom da je  $\ell \gg r$ . b) Izračunati  $L$  u vakuumu ako je  $r = 1$  cm,  $\ell = 10$  cm i  $N = 100$ .

## Rešenje

a) Možemo smatrati da je solenoid vrlo dug, te ćemo zanemariti efekte krajeva. Magnetska indukcija u solenoidu je

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{\ell}, \quad (1)$$

gde je  $i$  jačina struje kroz navoje solenoida. Magnetski fluks kroz jedan navoj iznosi

$$\Phi_1 = \pi r^2 \mu_0 \frac{Ni}{\ell}. \quad (2)$$

Ukupni fluks  $\Phi$  je  $N$  puta veći. Po definiciji, traženi koeficijent  $L$  iznosi  $\Phi/i$ , tj. u vakuumu je

$$L = \mu_0 \pi r^2 \frac{N^2}{\ell}. \quad (3)$$

Ako je još žica namotana na jezgro magnetske permeabilnosti  $\mu$ , biće

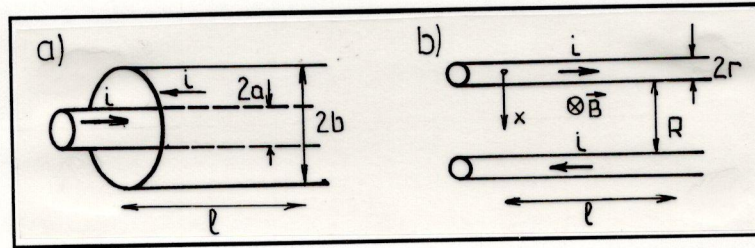
$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2}{\ell} S. \quad (4)$$

Ovo direktno sledi iz definicije permeabilnosti (videti u udžbeniku paragraf §94).

b) U vakuumu je  $\mu = 1$ , pa imamo  $L = 4\pi^2 10^{-6}$  H. Koeficijent samoindukcije je reda veličine stohiljaditog dela henrija.

## Pitanja i komentari

Pokažite da se ista formula (4) može primeniti i za izračunavanje koeficijenta samoindukcije torusnog namotaja sa  $N$  navoja i površinom poprečnog preseka  $S$ , a  $\mu$  je magnetska permeabilnost torusnog jezgra. Tada je  $\ell$  dužina srednje linije torusa.



Slika 58

Na Slici 58, skica *a*, prikazan je koaksijelni kabl kojeg čine dva cilindra poluprečnika  $a$  i  $b$  ( $a < b$ ), između njih je vakuum. Ako je unutrašnji cilindar pun, tj. ako struja teče po celom poprečnom preseku  $a^2\pi$  tada će magnetska indukcija biti

$$B_{r < a} = \frac{\mu_0 i r}{2\pi a^2}, \quad B_{r > a} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}. \quad (5)$$

Ukupan fluks  $\Phi = \int_0^b B(r)\ell dr$  kroz površinu osnog preseka glasi

$$\Phi = \frac{\mu_0 \ell i}{2\pi a^2} \frac{a^2}{2} + \frac{\mu_0 \ell i}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (6)$$

a kako je  $\Phi = L_\ell \ell i$ , odavde odmah dobijamo izraz za koeficijent samoindukcije po jedinici dužine u obliku

$$L_\ell = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]. \quad (7)$$

Ukoliko struja  $i$  teče po spoljašnjosti unutrašnjeg cilindra (što se može desiti ako postoji znatan skin efekat ili ako je unutrašnji cilindar šupalj) tada u srednjoj zagradi izraza (7) treba izostaviti član koji odgovara  $1/2$ . Pokazati.

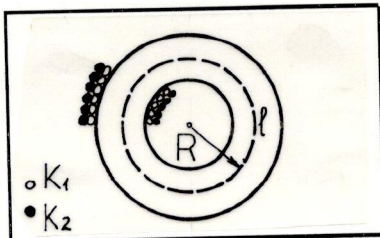
Na skici *b* Slike 58 prikazan je dvožični vod, za koga važi  $R \gg r$ . Pokazati da je za ovaj sistem koeficijent samoindukcije po jedinici dužine dat izrazom

$$L_\ell = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{R+r}{r}\right). \quad (8)$$

Uputstvo: ukupnu indukciju  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  naći po principu superpozicije, a zatim fluks  $\Phi$  računati samo kroz površinu između provodnika, najzad se poslužiti definicijom  $\Phi = L_\ell \ell i$ , za koeficijent samoindukcije po jedinici dužine.

## 59.

Na isto torusno jezgro od magnetika magnetske permeabilnosti  $\mu$  namotana su dva jednoslojna kabela koji tesno naležu jedan na drugi (Slika 59). Kalem  $K_1$  ima ukupan broj navoja  $N_1$ , a kalem  $K_2$  ima  $N_2$  navoja. Površina poprečnog preseka torusa je  $S = \pi r^2$ , a srednja linija torusa je  $\ell = 2\pi R$ . a) Naći koeficijent medjusobne indukcije  $L_{12}$ . b) Izračunati  $L_{12}$  ako je  $r = 0,5$  cm,  $R = 5$  cm,  $N_1 = N_2 = 100$  i  $\mu \simeq 1$ .



Slika 59

## Rešenje

a) Magnetska indukcija koju daje kalem  $K_1$  u tačkama kružnice poluprečnika  $R$  iznosi

$$B_1 = \mu_0 \mu \frac{N_1 i_1}{\ell}, \quad (1)$$

kad kroz taj kalem protiče struja jačine  $i_1$ . Fluks  $\Phi_1$  kroz jedan navoj kabela  $K_2$  iznosi

$$\Phi_1 = \pi r^2 \mu_0 \mu \frac{N_1 i_1}{\ell}. \quad (2)$$

Ukupni fluks kroz kalem  $K_2$  je  $N_2$  puta veći. Zato je, po definiciji  $L_{12} = \Phi_{12}/i_1$ , koeficijent uzajamne indukcije

$$L_{12} = \mu_0 \mu \pi r^2 \frac{N_1 N_2}{\ell}. \quad (3)$$

Koeficijent  $L_{12}$  proporcionalan je proizvodu broja navoja torusnih namotaja.

b) Provedimo račun po formuli (3). Dobijamo  $L_{12} = \pi \mu H$ .

## Pitanja i komentari

Nadjite i koeficijent medjusobne indukcije  $L_{21} = \Phi_{21}/i_2$  i pokažite na ovom primeru da važi  $L_{12} = L_{21}$ . U kojoj meri je ovaj rezultat opšti za magnetsku spregu kontura pročitajte u udžbeniku, dodatak 5.

Rezultat (3) važi i za dva solenoidna namotaja sa jezgrom (dužina  $\ell$ , površina poprečnog preseka  $S = \pi r^2$ ). Prema rezultatu prethodnog zadatka

koeficijent samoindukcije prvog kalema je

$$L_1 = \mu_0 \mu \frac{N_1^2 S}{\ell}, \quad (4)$$

a drugog

$$L_2 = \mu_0 \mu \frac{N_2^2 S}{\ell}. \quad (5)$$

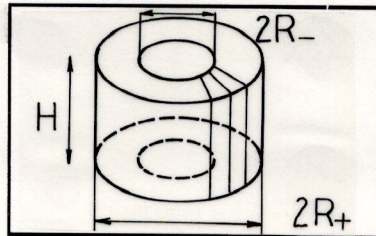
Oдавде sledi

$$L_1 L_2 = L_{12}^2. \quad (6)$$

U realnim uslovima, bez sugerisanih idealizacija, kada se uzima u obzir rasipanje magnetskog fluksa i slično, uvek se dobija da je  $L_{12}^2 < L_1 L_2$ .

### 60.

Namotano je  $N$  navoja na cilindar visine  $h$  s unutrašnjim radijusom  $R_-$  i spoljašnjim  $R_+$  (Slika 60). Kroz navoje teče struja jačine  $i$ . Magnetska permeabilnost je  $\mu$ . a) Naći koeficijent samoindukcije  $L$ . b) Izračunati  $L$  ako je  $R_- = 10$  cm,  $R_+ = 11$  cm,  $h = 1$  cm,  $N = 1000$  i  $\mu = 10$ .



Slika 60

#### Rešenje

a) Integraleći po krugu poluprečnika  $r$  ( $R_- < r < R_+$ ) nalazimo po teoremi o magnetskom naponu

$$\oint B(r) ds = \mu_0 \mu N i, \quad (1)$$

Kako je element putanje  $ds = r d\theta$ , biće

$$B(r) = \mu_0 \mu \frac{N i}{2\pi r}. \quad (2)$$

Kroz poprečnu površinu  $dS = h dr$  ova indukcija stvara fluks  $d\Phi_1 = B(r) h dr$ , a fluks kroz  $N$  takvih površina je

$$d\Phi = \mu_0 \mu \frac{N^2 i}{2\pi r} h dr. \quad (3)$$

Odavde je ukupni fluks torusnog namotaja

$$\Phi = \mu_0 \mu \frac{N^2 i h}{2\pi} \int_{R_-}^{R_+} \frac{dr}{r} = \mu_0 \mu \frac{N^2 h i}{2\pi} \ln \left( \frac{R_+}{R_-} \right). \quad (4)$$

Kako je po definiciji  $\Phi = Li$ , biće

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 h}{2\pi} \ln \left( \frac{R_+}{R_-} \right). \quad (5)$$

traženi koeficijent samoindukcije.

b) Zamena brojnih vrednosti daje  $L = 2 \text{ mH}$ .

#### Pitanja i komentari

Uvodjenjem debljine cilindra  $d = R_+ - R_-$ , izraz (5) postaje

$$L = \mu_0 \mu \frac{h}{2\pi} N^2 \ln \left( 1 + \frac{d}{R_-} \right). \quad (6)$$

Ako je  $d \ll R$  imamo

$$L = \mu_0 \mu N^2 \frac{S}{2\pi R_-}, \quad (7)$$

gde je  $S = hd$  površina poprečnog preseka torusa. Prisetimo da takodje aproksimativan izraz (videti zadatak 59)

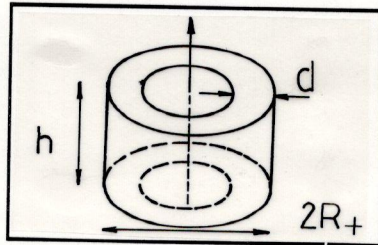
$$L = \mu_0 \mu N^2 \frac{S}{\ell}, \quad (8)$$

gde je  $\ell = 2\pi(R_- + d/2)$  dužina srednje linije torusa, daje nešto manju vrednost za koeficijent samoindukcije, nego prva aproksimacija (7) tačnog izraza (6).

U poznatom udžbeniku *D. V. Sivuhin, Kurs opšte fizike, tom III: Elektromagnetizam, "Nauka", Moskva 1977*, primetili smo nekorektno rešenje sličnog zadatka (paragraf §68, zadatak 2 na strani 286). Isti zadatak sa istim rešenjem prenet je i u knjigu grupe autora (redakcija *I. A. Jakovljeva*) *Zbornik zadataka iz opšteg kursa fizike, Elektromagnetizam, "Nauka", Moskva 1977* kao zadatak 409 na strani 79. Na sličan je način neadekvatno i rešenje zadatka 410 u toj knjizi.

## 61.

Kroz osu torusnog namotaja pravougaonog poprečnog preseka (videti prethodni zadatak) stavljen je dugi, pravi provodnik sa strujom  $i$  (Slika 61a). a) Naći koeficijent medjusobne indukcije  $L_{12}$  provodnika i torusnog kalema. b) Izračunati  $L_{12}$  ako je  $R_+ = 11$  cm,  $d = h = 1$  cm,  $\mu = 10$  i  $N = 1000$ .



Slika 61a

## Rešenje

a) Magnetska indukcija u tačkama kruga poluprečnika  $r$  (s centrom na osi kalema) iznosi

$$B = \mu_0 \mu \frac{i}{2\pi r}. \quad (1)$$

Kroz poprečnu površinu  $dS_1 = h dr$  postoji magnetski fluks  $d\Phi_1 = B dS_1$ , a kroz  $N$  navoja torusa fluks  $d\Phi_N = NB dS_1$ . Ukupni fluks kroz navoje torusa je

$$\Phi_N = \mu_0 \mu \frac{i}{2\pi} N h \int_{R_-}^{R_+} \frac{dr}{r}, \quad (2)$$

gde je  $R_- = R_+ - d$ , unutrašnji poluprečnik torusa. Po definiciji je  $\Phi_N = L_{12} i$  pa će

$$L_{12} = \mu_0 \mu \frac{h}{2\pi} N \ln \left( \frac{R_+}{R_-} \right), \quad (3)$$

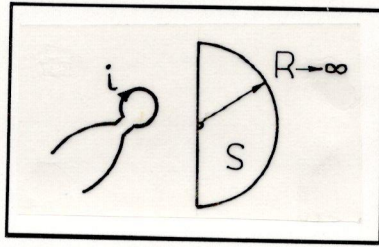
biti izraz za traženi koeficijent medjusobne indukcije.

b) Za naše brojne vrednosti izračunavamo  $L_{12} = 2 \mu\text{H}$ .

## Pitanja i komentari

Mala strujna petlja nalazi se blizu pravog provodnika koji se dalje zatvara preko polukruga beskonačnog poluprečnika (Slika 61b).



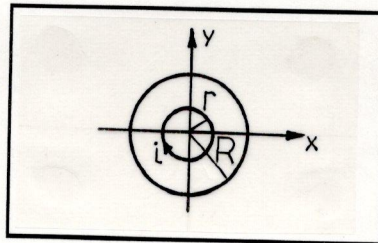


Slika 61b

Nadjite fluks koji stvara petlja kroz površinu  $S$  (veliki polukrug). Problem se jako uprošćava ako primenimo teoremu o uzajamnosti ( $L_{12} = L_{21}$ ).

## 62.

Po krugu  $x^2 + y^2 = r^2$  teče struja jačine  $i$ . Data je i kontura koja se podudara sa krugom  $x^2 + y^2 = R^2$  (Slika 62). a) Naći koeficijent uzajamne indukcije kontura  $L_{21}$  ako je  $r \ll R$ . b) Izračunati  $L_{21}$  ako je  $r = 1$  cm i  $R = 10$  cm.



Slika 62

## Rešenje

a) Traženi koeficijent uzajamne indukcije bi trebalo izračunavati po formuli

$$L_{21} = \frac{\Phi_2}{i}, \quad (1)$$

gde je  $\Phi_2$  magnetski fluks kojeg stvara struja  $i$  kroz površinu veće konture  $S = \pi R^2$ . Međutim, magnetsko polje oko manje konture ima složenu strukturu i proračun po formuli za fluks

$$\Phi_2 = \int_{(S)} B_n dS, \quad (2)$$

nije jednostavan.

Obrnuti zadatak, nalaženje koeficijenta uzajamne indukcije  $L_{12}$  po formuli

$$L_{12} = \frac{\Phi_1}{i}, \quad (3)$$

gde je  $\Phi_1$  magnetski fluks kojeg bi stvarala data struja  $i$  kad bi tekla u spoljašnjoj konturi kroz površinu unutrašnje konture  $S' = \pi r^2$ , bio bi očividno lak. Kako je tada magnetska indukcija  $B_0$  u centru jednaka  $\mu_0 i / 2R$  bilo bi praktično

$$\Phi_1 = \pi r^2 \mu_0 \frac{i}{2R}, \quad (4)$$

a odavde je

$$L_{12} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{r^2}{R}. \quad (5)$$

Medjutim, rezultat (5) ujedno je i rešenje našeg zadatka. Postoji tzv. *teorema uzajamnosti* koja uspostavlja vezu

$$L_{21} = L_{12}, \quad (6)$$

kao što je objašnjeno u udžbeniku, dodatak 5. Drugim rečima, ne računajući integral (2) može se zaključiti da je približno  $\Phi_2 = \pi r^2 \mu_0 i / 2R$ .

b) Koristeći formulu (5) nalazimo  $L_{21} = 2\pi^2 10^{-10}$  H. Koeficijent međusobne indukcije je reda veličine nanohenrija.

#### Pitanja i komentari

Teorema uzajamnosti ne važi u feromagnetskim sredinama. U njima, recipročnost flukseva se ne može obezbediti pošto magnetske permeabilnosti zavise od jačina struja u konturama.

Zamislimo da smo isključili struju  $i$  u maloj konturi. To bi u provodniku koji se poklapa sa velikom konturom izazvalo proticanje opterećenja  $q$ , kojeg možemo meriti balističkim galvanometrom. Pokažite da se iz tih podataka može izračunati magnetski moment strujne konture

$$p_m = \pi r^2 i = \frac{2qRR_0}{\mu_0}, \quad (7)$$

gde je  $R_0$  ukupna otpornost kola.

### 63.

Na kalem dužine  $\ell$  i poprečnog preseka  $S_1 = 3,14 \text{ cm}^2$  gusto je namotana bakarna žica dužine  $L_1 = 62,8 \text{ m}$ . Kroz kalem je propuštena struja jačine  $I_1 = 0,1 \text{ A}$ . U ovom kalemu, nalazi se drugi kalem iste dužine ali poprečnog preseka  $S_2 = 0,785 \text{ cm}^2$  tako da se njihove uzdužne ose simetrije poklapaju. Na drugi kalem gusto je namotana žica ukupne dužine  $L_2 = 47,1 \text{ m}$ . Odrediti jačinu struje  $I_2$  koju treba propustiti kroz drugi kalem da bi se energija magnetskog polja u zapremini koju zatvara kalem većeg poprečnog preseka udvostručila.

## Rešenje

Pošto je kalem gusto namotan imamo da jednom navoju pripada dužina  $2\pi r$ , gde je  $r = \sqrt{S/\pi}$  poluprečnik kalema. Odavde sledi da su brojevi namotaja prvog odnosno drugog kalema dati izrazima

$$N_1 = \frac{L_1}{2\pi\sqrt{S_1/\pi}}, \quad N_2 = \frac{L_2}{2\pi\sqrt{S_2/\pi}}. \quad (1a, b)$$

Energija magnetskog polja, pre puštanja struje kroz drugi kalem iznosi

$$W_1 = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 S_1 \ell = \frac{\mu_0 S_1}{2\ell} N_1^2 I_1^2, \quad (2)$$

dok, posle propuštanja struje kroz drugi kalem imamo da je energija magnetskog polja unutar drugog kalema (videti u udžbeniku paragraf §99)

$$W_2' = \frac{\mu_0 S_2}{2\ell} (N_1^2 I_1^2 + N_2^2 I_2^2 \pm 2N_1 N_2 I_1 I_2), \quad (3)$$

gde je treći član pozitivan ako su struje u oba kalema isto usmerene dok je u suprotnom negativan. Pored toga energija u delu zapremine  $(S_1 - S_2)\ell$  između dva kalema iznosi

$$W_2'' = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 (S_1 - S_2)\ell = \frac{\mu_0 (S_1 - S_2)}{2\ell} N_1^2 I_1^2, \quad (4)$$

pa je ukupna energija  $W_2 = W_2' + W_2''$  unutar prvog kalema jednaka

$$W_2 = \frac{\mu_0 S_1}{2\ell} N_1^2 I_1^2 + \frac{\mu_0 S_2}{2\ell} (N_2^2 I_2^2 \pm 2N_1 N_2 I_1 I_2). \quad (5)$$

Kako po uslovu zadatka treba da bude  $W_2 = 2W_1$ , koristeći se izrazima (2) i (5) dolazimo do jednačine

$$\frac{\mu_0 S_1}{2\ell} N_1^2 I_1^2 = \frac{\mu_0 S_2}{2\ell} N_2^2 I_2^2 \pm \frac{\mu_0 S_2}{\ell} N_1 N_2 I_1 I_2, \quad (6)$$

koja posle korišćenja izraza (1a,b) postaje

$$\frac{L_2^2}{2} I_2^2 \pm \frac{L_1 L_2}{\sqrt{S_1/S_2}} I_1 I_2 - \frac{L_1^2}{2} I_1^2 = 0. \quad (7)$$

Posle zamene brojnih vrednosti, dobijena kvadratna jednačina daje  $I_2 = 0,082$  A za slučaj isto usmerenih struja kroz oba kalema dok slučaju suprotno usmerenih struja odgovara rešenje  $I_2 = 0,216$  A.

## Pitanja i komentari

Za slučaj ovako postavljenih kalema odrediti koeficijent medjusobne indukcije  $L_{12}$ .

Naći rad koji je izvršen pri uspostavljanju struje  $I_2$  kroz drugi kalem.

## 64.

Dva torusna kalemata istog poluprečnika  $r = 0,2$  m namotana su jedan preko drugog. Kroz prvi torus sa  $N_1 = 1000$  navoja protiče struja jačine  $I_1 = 1$  A, dok kroz drugi torus koji ima  $N_2 = 2000$  navoja protiče struja jačine  $I_2 = 0,3$  A u smeru suprotnom u odnosu na struju  $I_1$ . Ako je površina poprečnih preseka torusa  $S = 4$  cm<sup>2</sup> naći rad koji je potrebno uložiti da bi se smer struje  $I_2$  promenio a njen intenzitet udvostručio.

## Rešenje

Energiju magnetskog polja dve strujne konture možemo dobiti iz izraza

$$W = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \pm L_{12}I_1I_2, \quad (1)$$

gde su  $L_1$  i  $L_2$  induktivnosti prve, odnosno druge konture, dok je  $L_{12}$  koeficijent medjusobne indukcije. U trećem članu izraza (1) stoji pozitivan znak za slučaj da su struje u konturama orjentisane u istom smeru, dok negativan znak stoji ako su struje suprotno usmerene.

Za slučaj torusa za koeficijente indukcije imamo

$$L_1 = \frac{\mu_0 S N_1^2}{2\pi r}, \quad L_2 = \frac{\mu_0 S N_2^2}{2\pi r}, \quad L_{12} = \frac{\mu_0 S N_1 N_2}{2\pi r}, \quad (2a, b, c)$$

pa za energiju magnetskog polja sistema od dva torusa, pre promene struje  $I_2$  imamo

$$W_1 = \frac{\mu_0 S}{4\pi r} (N_1^2 I_1^2 + N_2^2 I_2^2 - 2N_1 N_2 I_1 I_2), \quad (3)$$

dok posle promene struje  $I_2$  u vrednost  $I_2' = 2I_2$ , imamo

$$W_2 = \frac{\mu_0 S}{4\pi r} (N_1^2 I_1^2 + 4N_2^2 I_2^2 + 4N_1 N_2 I_1 I_2). \quad (4)$$

Razlika energija  $W_2 - W_1$  predstavlja traženi rad  $A$  koji treba izvršiti, tj. imamo

$$A = W_2 - W_1 = \frac{\mu_0 S}{4\pi r} (3N_2^2 I_2^2 + 6N_1 N_2 I_1 I_2), \quad (5)$$

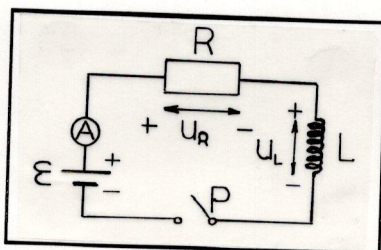
što posle zamene brojnih vrednosti daje  $A = 9,36 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ .

Pitanja i komentari

Pod uslovom da se struja  $I_2$  ne menja naći struju  $I_1'$  koja treba da protiče kroz prvi torus da bi se energija magnetskog polja promenila za vrednost datu izrazom (5).

65.

U trenutku  $t = 0$  zatvoren je prekidač P u kolu sa Slike 65 (redna veza kalema i otpornika). a) Opisati proces narastanja struje  $i$  u kolu za  $t > 0$ . b) Kolika je struja posle jedne sekunde od zatvaranja prekidača, ako je  $\mathcal{E} = 1 \text{ V}$ ,  $R = 1 \Omega$  i  $L = 1 \text{ H}$ ?



Slika 65

Rešenje

a) Posle zatvaranja prekidača počinje da raste struja u kolu. Javlja se elektromotorna sila samoindukcije u kalemu koeficijenta samoindukcije  $L$ . Ako je proces kvazistacionaran, a pretpostavićemo da to važi, možemo pisati shodno drugom Kirhofovom pravilu

$$\mathcal{E} = u_R + u_L = Ri - \left(-L \frac{di}{dt}\right). \quad (1)$$

Ova se relacija može svesti na diferencijalnu jednačinu

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (2)$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine glasi

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right) \right], \quad (3)$$

kao što je objašnjeno u udžbeniku, paragraf §95.

Struja eksponencijalno raste, asimptotski težeći vrednosti  $\mathcal{E}/R$ . Za  $t \ll L/R$ , porast je u stvari linearan, s nagibom  $\mathcal{E}/L$ .

b) Zamena brojnih vrednosti daje  $i \simeq 0.63 A$ . Za vreme od jedne vremenske konstante ( $t = L/R$ ) struja je već dostigla oko 63% konačne vrednosti.

**Pitanja i komentari**

Ako se posle vremena  $T$  otvori prekidač, pokažite da će za vreme  $t > T$  struja u kolu da opada po zakonu

$$i = i(T) \exp\left(-\frac{t-T}{L/R}\right), \quad (4)$$

gde je

$$i(T) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{T}{L/R}\right) \right]. \quad (5)$$

Skicirajte ovaj proces.

Po zakonu održanja energije, u toku uspostavljanja struje u kolu sa Slike 65 treba da bude

$$\int_0^{\infty} \mathcal{E} i dt = \int_0^{\infty} R i^2 dt + W, \quad (6)$$

gde je  $W$  nastala magnetska energija oko provodnika. Pokažite da je zaista

$$W = \frac{1}{2} L \left( \frac{\mathcal{E}}{R} \right)^2, \quad (7)$$

ako za struju  $i$  koristimo rezultat (3), sve u skladu sa izrazom za tzv. sopstvenu magnetsku energiju struje.

## GLAVA ŠESTA

## MAGNETICI

## 66.

Dugi, pravi provodnik ima kružni presek poluprečnika  $R$ . Cilindar je napravljen od homogenog materijala magnetskog permeabiliteta  $\mu > 1$  (paramagnetik). Konstantna struja  $i$  teče duž provodnika, koji je u vakuumu.

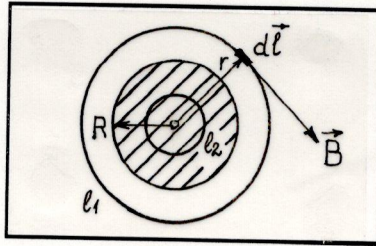
a) Kako zavisi magnetska indukcija  $B$  od rastojanja  $r$  od ose provodnika?  
 b) Kako zavisi jačina magnetskog polja od radijalne koordinate? Skicirati te funkcije.

## Rešenje

a) Primenimo teoremu o magnetskom naponu

$$\int_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (1)$$

Posmatrajmo prvo cirkulaciju po spoljašnjoj konturi ( $r > R$ ), po kružnici  $\ell_1$  (Slika 66a).



Slika 66a

Integral na desnoj strani jednačine je jačina struje  $i$ , a  $\vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi H dr$ , pri čemu je  $H$  u tačkama kruga  $\ell_1$  konstantna veličina. Zato je

$$H 2\pi r = i. \quad (2)$$

Dakle,

$$B_{r>R} = \mu_0 \frac{i}{2\pi r}. \quad (3)$$

(Za  $r > R$  u vakuumu, naravno je  $\mu = 1$ .)

Primenimo sada teoremu (1) na konturu  $\ell_2$  sa Slike 66a. Analognim postupkom lako ćemo naći da je (uz predostrožnost da sada ne ispuštimo magnetski permeabilitet sredine)

$$B_{r < R} = \mu_0 \mu \frac{i_{r < R}}{2\pi r}. \quad (4)$$

Ukupna struja  $i_{r < R}$  u ovom slučaju, je ona struja koja protiče unutar kruga  $\ell_2$ , dakle

$$i_{r < R} = j \pi r^2, \quad (5)$$

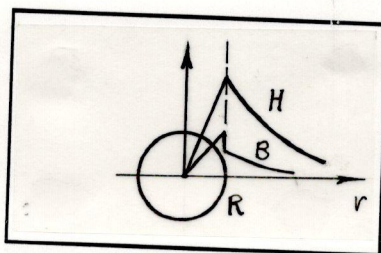
gde je gustina struje konstanta i iznosi

$$j = \frac{i}{\pi R^2}. \quad (6)$$

Tako, definitivno imamo

$$B_{r < R} = \mu_0 \mu \frac{ir}{2\pi R^2}. \quad (7)$$

Na Slici 66b skicirali smo zavisnost  $B(r)$  prema relacijama (3) i (7) (kriva B).



Slika 66b

b) Prema relacijama (2) i (7) možemo pisati i izraze za jačinu magnetskog polja (premda smo o tome dosta govorili i u zadatku 10)

$$H_{r < R} = \frac{i}{2\pi R^2} r, \quad H_{r > R} = \frac{i}{2\pi r}. \quad (8)$$

Skica funkcije  $H(r)$  data je takodje na Slici 66b (kriva H).

#### Pitanja i komentari

Funkcija  $H(r)$  je neprekidna u tački  $r = R$ . Medjutim, to ne važi za indukciju  $B(r)$ . Da li je naš rezultat u skladu sa graničnim uslovima?

Kakve modifikacije zahteva analiza provodnika od dijamagnetika?

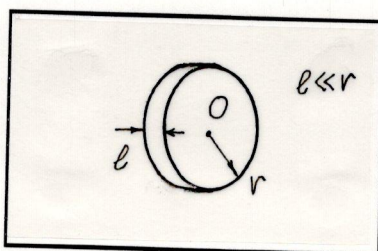


U kojem delu postupka smo koristili osobinu simetrije? Da li bismo ovako jednostavno odredili i polje, na primer, polucilindra sa strujom?

Ponekad se, u sličnim zadacima, koristi teorema o cirkulaciji vektora  $\vec{B}$ , umesto  $\vec{H}$ . Da li bi takav postupak za izvođenje formule (7) bio do kraja korektan?

## 67.

Disk debljine  $\ell$  i poluprečnika  $r$  homogeno je namagnećen. Poznat je intenzitet magnećenja  $I$ , a može se smatrati da je  $r \gg \ell$ . a) Kolika je magnetska indukcija  $B$  u tački O (centar diska na Slici 67)? b) Izračunati veličinu  $B$  ako je  $I = 0,1 \text{ A/m}$   $\ell = 1 \text{ cm}$  i  $r = 10 \text{ cm}$ .



Slika 67

## Rešenje

a) Pri homogenom magnećenju, intenzitet magnećenja  $I$  jednak je linskoj gustini površinske struje  $i_\ell$ . Jačina struje po obodu diska je onda

$$i = i_\ell \ell = I \ell. \quad (1)$$

Ovim smo problem sveli na zadatak nalaženja indukcije u centru kružne strujne konture, te je (Zadatak 5)

$$B = \mu_0 \frac{i}{D} = \mu_0 \frac{I \ell}{D}, \quad (2)$$

gde je  $D = 2r$  prečnik diska.

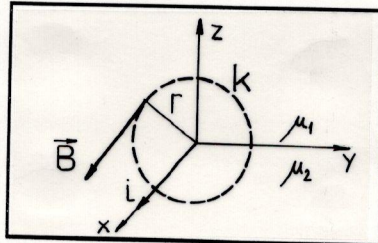
b) Pošto je  $D = 20 \text{ cm}$ , nalazimo  $B = 6,28 \cdot 10^{-9} \text{ T}$ .

## Pitanja i komentari

Iako mali, odnos  $\ell/r$  je konačan, pa bi preciznije bilo tretirati dati disk kao ograničeni solenoid. Možete li proceniti grešku koja se čini svodjenjem solenoida na jednozavojnu strujnu konturu?

## 68.

Duž  $x$ -ose postavljen je provodnik sa strujom jačine  $i$ . Poluprostor  $z > 0$  ispunjen je homogenim neprovodnim magnetikom magnetske permeabilnosti  $\mu_1$ , dok je u delu prostora  $z < 0$  homogeni neprovodni magnetik magnetske permeabilnosti  $\mu_2$  (Slika 68). Odrediti magnetsku indukciju u celom prostoru.



Slika 68

## Rešenje

Jasno je da su linije magnetske indukcije krugovi sa centrom na osi  $x$ . Jedan takav krug ( $k$ ) prikazan je na slici. Intenzitet magnetske indukcije zavisi jedino od poluprečnika kruga  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ . Označimo sa  $B_1$  magnetsku indukciju za  $z > 0$ , a sa  $B_2$  magnetsku indukciju za  $z < 0$ . Po teoremi o magnetskom naponu možemo da pišemo

$$\oint_{(k)} H_s ds = \int_{(z < 0)} H_2 ds + \int_{(z > 0)} H_1 ds = i. \quad (1)$$

Ovde je  $H_1 = B_1 / \mu_0 \mu_1$  i  $H_2 = B_2 / \mu_0 \mu_2$ . Integraljenje po polukrugovima daje

$$\frac{B_2}{\mu_2} \pi r + \frac{B_1}{\mu_1} \pi r = \mu_0 i. \quad (2)$$

Granični uslov na ravni  $z = 0$  omogućava da dobijemo vezu

$$B_1 = B_2. \quad (3)$$

Imajući ovo u vidu, iz jednačine (2) nalazimo

$$B_1 = \mu_e \mu_0 \frac{i}{2\pi r}, \quad (4)$$

gde je

$$\mu_e = \frac{2}{1/\mu_1 + 1/\mu_2}. \quad (5)$$

## Pitanja i komentari

Izraz (4) isti je kao za magnetsku indukciju u homogenom magnetiku permeabilnosti  $\mu = \mu_e$ . Izračunajte  $\mu_e$  za kombinaciju vakuum-aluminijum ( $\mu_{Al} = 1,000021$ ).

Proverite da li za  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  formula (4) daje ispravan rezultat.

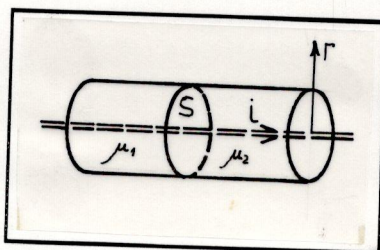
Proverite da su odgovarajuće jačine magnetskog polja

$$H_1 = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} H_0, \quad H_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} H_0, \quad (6)$$

gde je  $H_0 = i/2\pi r$ , jačina magnetskog polja oko pravog provodnika sa strujom u vakuumu. Smeju li se sve ove formule koristiti kako za paramagnetike, tako i za dijamagnetike?

## 69.

Dugi cilindar od magnetika permeabilnosti  $\mu_1$  spojen je sa cilindrom od magnetika permeabilnosti  $\mu_2$  (Slika 69). Duž zajedničke ose postavljen je provodnik kojim teče struja jačine  $i$ . Odrediti jačine magnetskog polja u jednom i drugom delu cilindričnog magnetika, kao i odgovarajuća magnećenja. Pretpostavlja se da su magnetici homogeni, izotropni i neprovodni.



Slika 69

## Rešenje

Ako bi pravolinijski provodnik sa strujom bio u vakuumu, jačina magnetskog polja bi iznosila

$$H = \frac{i}{2\pi r}. \quad (1)$$

Potpuno isti izraz važi ako je provodnik u beskonačnom homogenom magnetiku. Ima još jedan slučaj kada formula (1) ostaje na snazi, a to je upravo situacija iz našeg zadatka: homogeni magnetik ispunjava svu zapreminu koja je ograničena površinama što ih obrazuju linije vektora  $\vec{H}$  u vakuumu. Dakle,

$$H_1 = H_2 = H = \frac{i}{2\pi r}. \quad (2)$$

Za naše magnetike važi

$$I = \kappa H . \quad (3)$$

To znači da je magnećenje u prvom delu

$$I_1 = \kappa_1 H , \quad (4)$$

a u drugom, na sličan način

$$I_2 = \kappa_2 H , \quad (5)$$

gde su

$$\kappa_1 = \mu_1 - 1 , \quad \kappa_2 = \mu_2 - 1 , \quad (6)$$

magnetske susceptibilnosti materijala. Tako na kraju imamo

$$I_1 = (\mu_1 - 1) \frac{i}{2\pi r} , \quad I_2 = (\mu_2 - 1) \frac{i}{2\pi r} . \quad (7)$$

#### Pitanja i komentari

Pri prelasku iz magnetika 1 u magnetik 2 treba da budu zadovoljeni granični uslovi za vektor magnetskog polja. Znamo da su linije sile krugovi u ravnima koje su paralelne razdvojnoj površini  $S$  sa Slike 69. Jesu li naši rezultati saglasni sa graničnim uslovima?

Po graničnoj površini  $S$  teku površinske struje magnećenja. Linijska gustina površinske struje jednaka je magnećenju. Na osnovu toga, pokažite da je

$$j_1 = (\mu_1 - \mu_2) \frac{i}{2\pi r} , \quad (8)$$

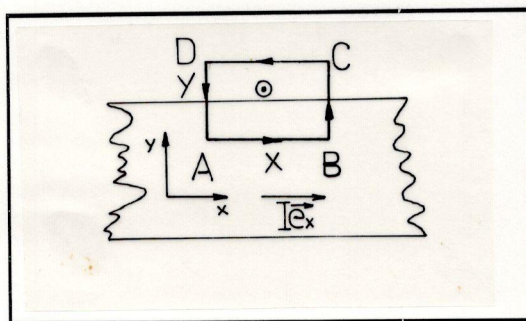
ukupna linijska gustina površinske struje na razdvojnoj površini  $S$  dva magnetika sa Slike 69. Pokažite da je to radialna struja.

---

### 70.

---

Homogeni, izotropni magnetik cilindričnog oblika (Slika 70) homogeno je namagnećen ( $I = |\vec{I}| = \text{const}$ ) u pravcu ose cilindra. Odrediti  $j_1$ , linijsku gustinu površinske struje magnećenja.



Slika 70

## Rešenje

Posmatrajmo na slici osni presek cilindra. Uočimo pravougaonu konturu ABCD; stranica  $\overline{AB}$ , dužine  $X$ , paralelna je osi  $x$ , koja se poklapa sa osom cilindra i nalazi se u magnetiku. Stranica  $\overline{CD}$  nalazi se van magnetika. Cirkulacija vektora  $\vec{I}$  duž date konture daće ukupnu površinsku struju magnećenja po dužini  $X$ , što je lako uočiti ako imamo u vidu teoremu o magnetskom naponu i znamo da je  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{I}$ . Dakle,

$$\oint_{ABCD} I \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = j_1 X. \quad (1)$$

Cirkulacija duž segmenata  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  i  $\overline{DA}$  očito ne doprinosi vrednosti integrala, pa jednačina (1) odmah daje

$$j_1 = I. \quad (2)$$

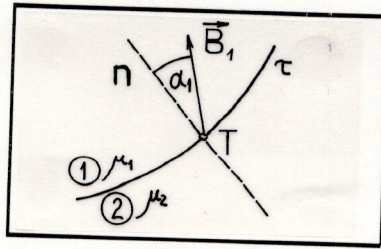
## Pitanja i komentari

Pri homogenom magnećenju struja magnećenja je površinska struja. Videti obrazloženje u udžbeniku, paragraf §103.

Proverite da li su smerovi vektora  $\vec{j}_1$  i  $\vec{I}$  povezani pravilom desnog zavrtnja.

## 71.

Uočimo graničnu površinu  $\tau$  izmedju dva magnetika (Slika 71) magnetskih permeabilnosti  $\mu_1$  i  $\mu_2$ . Blizu tačke T, u prvom magnetiku poznata je magnetska indukcija  $\vec{B}_1$  kao i ugao izmedju vektora magnetske indukcije i normale na površini (na Slici 71, ugao  $\alpha_1$ ). a) Odrediti  $\vec{B}_2$ , magnetsku indukciju u sredini dva, u blizini tačke T. b) Izračunati odnos intenziteta indukcija  $B_1/B_2$  i  $\alpha_2$  (ugao koji zaklapa indukcija  $\vec{B}_2$  sa normalom na površinu u tački T) ako je  $\alpha_1 = 30^\circ$  i  $\mu_2/\mu_1 = 2$ .



Slika 71

## Rešenje

a) Obeležimo sa  $B_{1n}$  normalnu komponentu magnetske indukcije  $\vec{B}_1$ , pri čemu je

$$B_{1n} = B_1 \cos \alpha_1. \quad (1)$$

Na sličan način, za tangencijalnu komponentu će biti

$$B_{1t} = B_1 \sin \alpha_1. \quad (2)$$

Odgovarajuće komponente magnetske indukcije  $\vec{B}_2$  obeležimo sa  $B_{2n}$  i  $B_{2t}$ . Granični uslov za normalne komponente magnetske indukcije daje

$$B_{1n} = B_{2n} = B_1 \cos \alpha_1. \quad (3)$$

Iz graničnog uslova  $H_{2t} = H_{1t}$ , za tangencijalne komponente jačine magnet-skog polja, nalazimo

$$H_{2t} = \frac{B_{1t}}{\mu_0 \mu_1} = \frac{B_1 \sin \alpha_1}{\mu_0 \mu_1}. \quad (4)$$

Oдавde sada dobijamo

$$B_{2t} = \mu_0 \mu_2 H_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_1 \sin \alpha_1. \quad (5)$$

Konačno izračunavamo intenzitet tražene magnetske indukcije

$$B_2 = \sqrt{B_{2n}^2 + B_{2t}^2} = B_1 \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 \sin^2 \alpha_1}. \quad (6)$$

Magnetska indukcija  $\vec{B}_2$  zaklapa ugao  $\alpha_2$  sa normalom. Iz formule za ugao prelamanja linije sile na razdvojnoj površini nalazimo

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (7)$$

a odavde

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \right). \quad (8)$$

b) Zamena brojnih vrednosti daje  $\alpha_2 = 49,1^\circ$  i  $B_2/B_1 = 1,32$ . Linije sile se prelamaju ka normali kad iz sredine dva prelazimo u sredinu jedan. Intenzitet magnetske indukcije veći je u sredini dva.

#### Pitanja i komentari

Odredite graničnu vrednost  $\lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_2} B_2$ . Je li rezultat logičan?

Nadjite graničnu vrednost  $\lim_{\alpha_1 \rightarrow 0} B_2$ . Je li rezultat logičan?

U slučaju da je  $\mu_2 \ll \mu_1$ , uprostire izraz (6). Skicirajte na osnovu toga linije sile u magneticima.

### 72.

Pravi, dugi cilindar kružnog poprečnog preseka, poluprečnika  $R$ , izradjen od paramagnetskog materijala magnetske permeabilnosti  $\mu_1$ , nalazi se u (neograničenom) magnetiku magnetskog permeabiliteta  $\mu_2$ , pri čemu je  $\mu_1 > \mu_2$ . Po osi cilindra teče struja jačine  $i$ . Odrediti magnetsku indukciju  $B$  u svim tačkama prostora. Skicirati  $B(r)$  i  $H(r)$  (jačinu magnetskog polja).

#### Rešenje

Zadatak ćemo rešavati koristeći teoremu o magnetskom naponu. Znamo da je njena upotreba moguća i u prisustvu magnetika. Koristićemo osobinu simetrije koja je u ovom zadatku očevidna. Za krug radijusa  $r < R$  imaćemo

$$H \cdot 2\pi r = i, \quad (1)$$

a odavde odmah, budući da je  $B = \mu_0 \mu_1 H$ , sledi

$$B_{r < R} = \mu_0 \mu_1 \frac{i}{2\pi r}. \quad (2)$$

Veza tipa (1) važi i za krug poluprečnika  $r > R$ . Medjutim, van cilindra je

$$B_{r > R} = \mu_0 \mu_2 H. \quad (3)$$

Zato će biti

$$B_{r > R} = \mu_0 \mu_2 \frac{i}{2\pi r}. \quad (4)$$

Primetimo da je na granici cilindra

$$B_- = \lim_{r \rightarrow R} B_{r < R} = \mu_0 \mu_1 \frac{i}{2\pi R}. \quad (5)$$

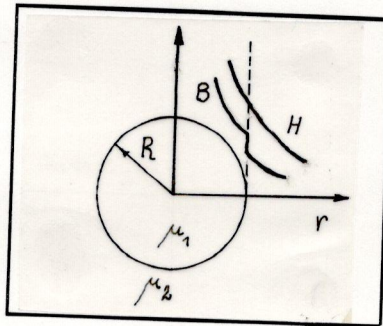
Približavajući se granici cilindra sa spoljašnje strane, nalazimo

$$B_+ = \lim_{r \rightarrow R} B_{r > R} = \mu_0 \mu_2 \frac{i}{2\pi R}. \quad (6)$$

Vidimo da je

$$\frac{B_-}{B_+} = \frac{\mu_1}{\mu_2} > 1, \quad (7)$$

što znači da funkcija  $B(r)$  ima diskontinuitet na granici cilindra. Ta je osobina prikazana



Slika 72

na Slici 72, kriva  $B$ . Na krivoj  $H$ , za jačinu magnetskog polja, prekid funkcije ne postoji, što čitalac lako može zaključiti iz priloženih jednačina.

#### Pitanja i komentari

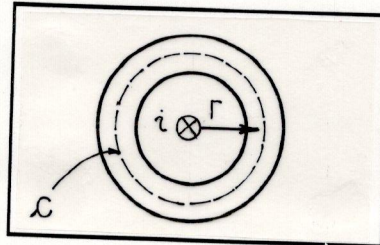
a) Skicirati  $B(r)$  ako je  $\mu_1 < \mu_2$ . b) Skicirati  $B(r)$  ako je cilindar dijamagnetičan. c) Skicirajte  $B(r)$  ako je cilindar od paramagnetika, a sredina dijamagnetična.

Zbog čega je magnetska indukcija veća u cilindru nego u okolnom prostoru? (videti Sliku 72)? (U analizi, uzmite u obzir molekularne struje oko provodnika sa strujom i na površini cilindra. Uprošćenja radi može se pretpostaviti da je oko cilindra vakuum.)



## 73.

Oko dugog, pravog provodnika kojim teče struja jačine  $i$  nalazi se torus magnetskog permeabiliteta  $\mu > 1$ . a) Odrediti magnetski napon  $U_m$  duž srednje linije torusa (kružnica  $c$  na Slici 73). b) Izračunati  $U_m$  ako je  $\mu - 1 = 2,5 \cdot 10^{-5}$  i  $r = 5$  cm. Merenjem je ustanovljeno da magnetska indukcija  $B$  u tačkama kruga  $c$  ima vrednost  $40 \mu\text{T}$ . c) Kako će se promeniti  $U_m$  ako uklonimo torusno jezgro?



Slika 73

## Rešenje

a) Po definiciji, magnetski napon je cirkulacija vektora jačine magnetskog polja duž date putanje  $c$  (krug poluprečnika  $r$ )

$$U_m = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_c H_t ds. \quad (1)$$

Ako je struja po osi torusa, simetrija obezbedjuje da je tangencijalna komponenta jačine magnetskog polja  $H_t = H = \text{const}$  na kružnici  $c$ . Dakle,

$$U_m = 2\pi r H = \frac{2\pi r}{\mu_0 \mu} B. \quad (2)$$

b) Ako je  $B = 40 \mu\text{T}$  tada je  $H = B/\mu_0 \mu \simeq 31,83 \text{ A/m}$  pa dobijamo  $U_m = 10 \text{ A}$ .

c) Magnetski napon se neće promeniti. Njegovu vrednost određuje jedino struja u provodniku, ne i molekularne struje magnetika.

## Pitanja i komentari

Zamislimo da jedno parče torusa nedostaje, da smo ga odstranili. Kako bi se to odrazilo na magnetski napon? Udaljeni deo supstancije odnosi odgovarajući deo molekularnih struja, što menja magnetsku indukciju  $\vec{B}$ . Kako je  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ , jasno je da se mora menjati i jačina magnetskog polja. Ipak, to neće uticati na vrednost magnetskog napona, dok bi se, na primer, cirkulacija

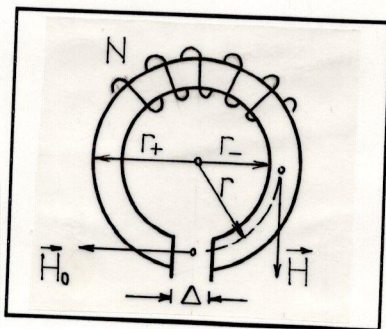
magnetske indukcije duž putanje  $c$  svakako promenila. Cirkulacija vektora jačine magnetskog polja određena je strujom provodnika koji prodire kroz površinu naslonjenu na kružnicu  $c$ .

Mogu li se ponudjeni argumenti koristiti i u slučaju da je torus dijamagnetičan? Smemo li generalisati postupak i za materijale kod kojih je  $\mu \gg 1$  (feromagnetici)?

Kolika je jačina struje u provodniku koji prolazi kroz torus? Mora li provodnik prolaziti strogo kroz centar simetrije, da bi sve rečeno bilo korektno?

## 74.

Dato je torusno jezgro od feromagnetskog materijala, unutrašnjeg poluprečnika  $r_-$  i spoljašnjeg poluprečnika  $r_+$ . Oko jezgra je namotan kalem ukupnog broja navoja  $N$ . Na jednom mestu postoji uski procep u feromagnetiku debljine  $\Delta$  (Slika 74). U tom procepu izmerena je jačina magnetskog polja  $H_0$  kad kroz kalem protiče struja jačine  $i$ . Kolika je jačina magnetskog polja u ostalim tačkama srednjeg poluprečnika  $r = (r_+ + r_-)/2$ ?



Slika 74

## Rešenje

Po teoremi o magnetskom naponu važi

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = Ni. \quad (1)$$

Integral se izuma po kružnici poluprečnika  $r$ . Vektori jačine magnetskog polja  $\vec{H}$  i elementa putanje  $d\vec{l}$  kolinearni su u svakoj tački kružnice. Zato je

$$\vec{H} \cdot d\vec{l} = l_1 H + l_2 H_0, \quad (2)$$

gde je  $H_0$  jačina magnetskog polja u procepu a  $H$  u ostalim delovima torusa. Pošto je  $l_1 = 2\pi r - \Delta$  i  $l_2 = \Delta$ , nalazimo

$$(2\pi r - \Delta)H + H_0\Delta = Ni, \quad (3)$$

a odavde

$$H = \frac{Ni - H_0\Delta}{2\pi r - \Delta}. \quad (4)$$

Pitanja i komentari

Ako je  $\Delta \ll 2\pi r$ , pokažite da je

$$H \simeq H_{vac} \left[ 1 - \frac{H_0}{Ni/\Delta} \right], \quad (5)$$

gde je  $H_{vac} = Ni/(2\pi r)$  jačina magnetskog polja u torusu bez jezgra. Vidimo da  $H \rightarrow H_{vac}$  tek kad  $\Delta \rightarrow 0$ . Za konačno  $\Delta$  govorimo o ograničenom magnetiku u kojem je  $H < H_{vac}$  za veličinu koja se opisuje pomoću tzv. faktora razmagnećenja (videti u udžbeniku paragraf §107).

75.

Valjak od feromagnetskog materijala ima poluprečnik osnove  $r$  i visinu  $H$ . Pretpostavimo da su magnetski momenti spinova svih elektrona u valjku uređeni duž ose valjka. a) Proceniti ukupni spinski magnetski moment  $I$  elektrona. b) Izračunati  $I$  ako je  $r = 1$  cm i  $H = 10$  cm.

Rešenje

a) Obeležimo sa  $n_e$  broj elektrona u kilogramu supstancije. Broj atoma po 1 kg iznosi  $N_A/M$  (Avogadrov broj podeljen molarnom masom). Svaki atom ima  $Z$  elektrona ( $Z$  je redni broj atoma). U srednjem na svaki proton u jezgru dolazi i jedan neutron pa je za procenu dovoljno uzeti  $Z = 1$  i  $M = 2$  kg/kmol, tj.

$$n_e = 3 \cdot 10^{26} \frac{\text{elektrona}}{\text{kg}}. \quad (1)$$

U valjku će biti  $N_e$  elektrona, pri čemu je

$$N_e = n_e m, \quad (2)$$

gde je  $m$  masa valjka. Kako je masa valjka

$$m = \rho r^2 \pi H, \quad (3)$$

gde je  $\rho$  gustina feromagnetika, biće

$$N_e = n_e \rho r^2 \pi H. \quad (4)$$

Tako definitivno nalazimo

$$I = N_e \mu_B = n_e r^2 \pi H \rho \mu_B, \quad (5)$$

gde je  $\mu_B$  spinski magnetski moment jednog elektrona (Borov magneton), koji iznosi  $9,283 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$ .

b) Za procenu, gustina neka iznosi  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$  (brojka bliska podacima za Fe, Ni i Co). Tada je  $I \simeq 700 \text{ Am}^2$ .

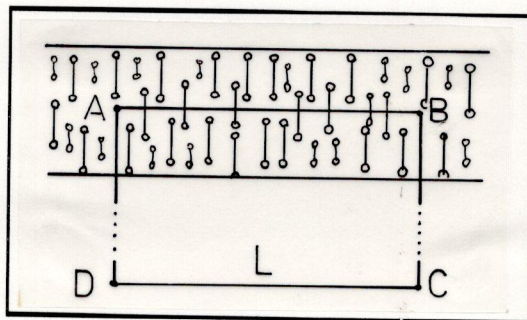
#### Pitanja i komentari

Izračunajte jačinu struje  $i$  koja bi tekući po kružnici poluprečnika  $r = 0,1 \text{ m}$  davala magnetski moment uporediv sa dobijenim rezultatom. (Odgovor:  $i = 2,2 \cdot 10^4 \text{ A}$ ).

### 76.

Posmatrajmo veoma dugi cilindar uniformnog poprečnog preseka proizvoljnog oblika, od namagnećenog materijala. Magnećenje je homogeno, intenziteta  $I$ . Primenom teoreme o magnetskom naponu, pokazati da je magnetska indukcija u cilindru  $B = \mu_0 I$ .

#### Rešenje



Slika 76

Uzmimo da su se svi strujni momenti elementarnih strujnih kontura u materijalu cilindra idealno uredili duž pravaca paralelnih osi cilindra. Neka je  $S$  površina jedne elementarne strujne konture, a  $i$  jačina njene struje. Konture su na Slici 76 predstavljene sa dva kružića spojena kratkom duži. Koncentraciju kontura obeležimo sa  $n$ . Izaberimo konturu integracije u vidu pravougaonika stranice  $\ell = \overline{AB}$  (ona je paralelna osi cilindra) i povratnog provodnika  $\overline{CD}$  beskonačno udaljenog. Cirkulacije duž dva poprečna segmenta  $\overline{DA}$  i  $\overline{BC}$  konture jednake su i međusobno se potiru. Magnetsko polje iščezava za  $r \rightarrow \infty$  i stoga zanemarujemo i cirkulaciju po segmentu

$\overline{CD}$ . Zbog toga se  $\oint \vec{B}_M \cdot d\vec{\ell}$  redukuje na

$$\int_0^{\ell} B_M d\ell = \mu_0 N i. \quad (1)$$

Ovde je  $N$  broj elementarnih kontura kroz koje prodire duž  $\ell = \overline{AB}$ .

Zamislimo cilindar visine  $\ell$  i površine poprečnog preseka  $S$ . Očito, putanja integracije će prodirati kroz sve one konture kojima je centar u ovom cilindru. Stoga, pri stohastički raspoređenim konturama će biti

$$N = nS\ell. \quad (2)$$

Makroskopska magnetska indukcija u materijalu cilindra je srednja vrednost

$$\frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} B_M d\ell. \quad (3)$$

Imajući u vidu jednačine (1) i (2), iz definicije (3) nalazimo

$$B = \mu_0 n S i. \quad (4)$$

Uvidjajući da je  $S i = p_m$  (magnetski moment jedne elementarne strujne konture) i da je, po definiciji, magnećenje (magnetski moment jedinične zapremine magnetika)

$$I = n p_m, \quad (5)$$

nalazimo definitivno iz jednačine (4)

$$B = \mu_0 I, \quad (6)$$

što je i trebalo dokazati.

#### Pitanja i komentari

U gornjoj analizi zanemaruju se efekti krajeva. Mogao bi se uzeti u obzir i nagib strujnih momenata kada je

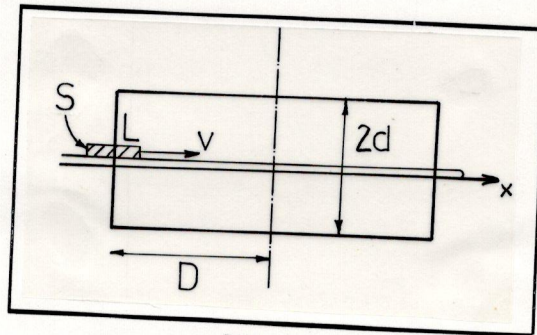
$$\vec{p}_m \cdot d\vec{\ell} = p_m d\ell \cos \theta, \quad (7)$$

pri čemu je  $\theta \neq 0^\circ$ .

Više detalja o ovom zanimljivom izvodjenju, koje je različito od uobičajenog u mnogim udžbenicima može se naći u članku *A. J. Dahm, Simple derivation of the magnetic field inside a long rod of magnetic material, Am. J. Phys. 46(7), July 1978, p. 732.*

77.

Posmatrajmo na Slici 77 horizontalno postavljen solenoid dijametra  $2d$  i dužine  $2D$ . Po osi solenoida nalazi se šina od nemagnetskog materijala po kojoj može da klizi (praktično bez trenja) mali cilindar (površine poprečnog preseka  $S$ , dužine  $L$  i gustine  $\rho$ ) magnetskog permeabiliteta  $\mu$ . Na početku cilindar se nalazio blizu ulaza solenoida, onda ga je magnetska sila uvlačila ka centru solenoida i ubrzavala. Procenite kolika će biti njegova brzina, po redu veličine, na izlazu iz solenoida.



Slika 77

Rešenje

Pretpostavićemo da se materijal cilindra homogeno magneti. Linijska gustina površinske struje  $j_\ell$  jednaka je magnećenju  $I$ . Iskoristimo poznatu vezu između magnećenja i jačine magnetskog polja u izotropnim magnetima,  $I = (\mu - 1)H$ ; pritom je magnetska indukcija  $B = \mu_0 \mu H$ . Magnetski moment cilindra  $P_m$  je, po definiciji, proizvod površinske struje  $i$  i površine poprečnog preseka  $S$  i pošto je  $i = j_\ell L$ , biće

$$P_m = IV, \quad (1)$$

gde je  $V$  zapremina cilindra ( $V = LS$ ), ili

$$P_m = \frac{\mu - 1}{\mu_0 \mu} BV. \quad (2)$$

U nehomogenom magnetskom polju, na magnetski moment  $P_m$  delovaće sila

$$F = P_m \frac{dB}{dx}. \quad (3)$$

Za procenu, gradijent polja solenoida duž ose je približno

$$\frac{\Delta B}{\Delta x} \simeq \frac{B_0}{2D}, \quad (4)$$

(videti zadatak 13) gde je  $B_0$  magnetska indukcija u centru solenoida. Mnogo tačnija procena bi zahtevala da uzmemo u obzir i širinu solenoida i tačan položaj tela, što ćemo izbeći.

Za vreme  $dt$  sila  $F$  promeniće brzinu cilindra za  $dv$ , te je prema zakonima mehanike

$$\int F(t) dt = m \int dv. \quad (5)$$

Učinićemo još neka uprošćenja. Neka je proces ubrzavanja tekao kratko, neko vreme  $\Delta t$ , a da je za to vreme sila bila uglavnom konstantna i data izrazom  $F = P_m B_0 / 2D$ . U tom slučaju će krajnja brzina  $v_0$  biti, prema relaciji (5)

$$v_0 = \frac{F \Delta t}{m} = P_m \frac{B_0}{2D} \frac{\Delta t}{m}. \quad (6)$$

Takodje, po redu veličine je

$$\Delta t = \frac{D}{v_0}. \quad (7)$$

Za masu cilindra možemo pisati  $m = \rho V$ . Stoga, prema jednačinama (2) i (7), iz veze (6) nastaje

$$v_0 \sim \sqrt{\frac{\mu - 1}{\mu} \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{1}{\rho}}. \quad (8)$$

#### Pitanja i komentari

Uredjaj koji bi se mogao napraviti na principima iznetim u ovom zadatku ponekad se naziva *elektropuška*.

Da opravdamo našu aproksimaciju (6), možemo zamisliti da se solenoid napaja kratkim strujnim impulsom koji se anulira otprilike kad tane (cilindar) stigne u oblast homogenog polja. (Kad bi struja i posle toga tekla, to bi bilo kontraproduktivno - magnetsko polje bi počelo da zaustavlja pokretno telo.)

Pomoću dimenzione analize pokažite da ako mora biti

$$v_0^2 \sim \mu_0^r B_0^s \rho^t, \quad (9)$$

gde su  $r, s, i t$  neki racionalni brojevi, tada je  $r = -1, s = 2$  i  $t = -1$ , u skladu sa relacijom (8).

Primetimo da je  $\rho v_0^2$  mera gustine kinetičke energije pokretnog cilindra. S druge strane, znamo da je  $B_0^2/2\mu_0$  gustina magnetske energije u solenoidu. Da li je u tom svetlu logičan naš rezultat (8)? Po zakonu održanja energije, koja bi bila maksimalno moguća brzina cilindra?

Naša analiza podrazumeva da je

$$\lim_{\mu \rightarrow 1} v_0(\mu) = 0. \quad (10)$$

Kojim argumentima opravdavate ovaj rezultat?

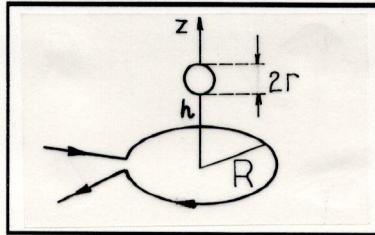
Sme li se koristiti isti postupak i za cilindar od feromagnetskog materijala?

Procenite brzinu gvoženog taneta ( $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ) u polju indukcije  $B = 1 \text{ T}$ . (Odgovor:  $v_0 \sim 10 \text{ m/s}$ .)

Kako objašnjavate da kvalitativna formula za brzinu (8) ne zavisi eksplicitno od dimenzija cilindra?

### 78.

Mala metalna kugla gustine  $\rho$  i poluprečnika  $r$  (Slika 78) nalazi se na osi kružne strujne konture radijusa  $R$  kojom teče struja  $i = \sqrt{2}I_{eff}\cos(\omega t)$ . a) Kolika je efektivna vrednost struje  $I_{eff}$  ako kugla levitira na visini  $h$ ? b) Izračunati  $I_{eff}$  ako je  $r = 0,5 \text{ cm}$ ,  $R = 2,5 \text{ cm}$ ,  $\rho = 8 \text{ g/cm}^3$ ,  $h = 0,5 \text{ cm}$  i  $\omega = 2\pi 400 \text{ kHz}$ .



Slika 78

#### Rešenje

Zbog skin-efekta, vremenski promenljivo magnetsko polje ne prodire značajnije u unutrašnjost kugle. To znači da je magnetski fluks kroz presek sfere ( $S = \pi r^2$ ) jednak nuli. U suštini, struje indukovane u površinskom sloju kugle poništavaju dejstvo strujne konture. Približno, ovaj fenomen ćemo opisati relacijom  $\Phi_{kontura} = \Phi_{kugla}$ , koja implicira

$$H_z \pi r^2 = \frac{i_{kugla}}{2r} \pi r^2. \quad (1)$$



Ovde je  $H_z$  jačina magnetskog polja kojeg stvara strujna kontura na mestu kugle, a  $i_{kugla}$  je ukupna jačina površinske struje na kugli, koju možemo zamisliti kao prstenastu struju u ekvatorijalnoj ravni kugle. Dakle,

$$i_{kugla} = 2rH_z. \quad (2)$$

Strujni momenat kugle je onda  $p_m = i_{kugla} \pi r^2$ , odnosno

$$\vec{p}_m = -2\pi r^3 H_z \vec{e}_z. \quad (3)$$

Ovde je  $\vec{e}_z$  ort z-ose. Nama je poznat rezultat (videti zadatak 6)

$$\vec{H}_z = \frac{\sqrt{2}I_{eff}R^2 \cos(\omega t)}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z. \quad (4)$$

Primenimo sada formulu za silu u nehomogenom magnetskom polju

$$\vec{F} = p_m \frac{d(\mu_0 H_z)}{dz} \vec{e}_z. \quad (5)$$

Pošto je

$$\frac{dH_z}{dz} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}I_{eff}R^2 \frac{z \cos(\omega t)}{(R^2 + z^2)^{5/2}}, \quad (6)$$

izraz za silu dobija oblik

$$\vec{F} = \frac{3}{2}\mu_0\pi r^3 R^4 2I_{eff}^2 \frac{z \cos^2(\omega t)}{(R^2 + z^2)^4} \vec{e}_z. \quad (7)$$

Uzećemo srednju vrednost  $\vec{F}_{sr}$  u toku jednog perioda  $T = 2\pi/\omega$ :

$$\vec{F}_{sr} = \frac{3}{2}\mu_0\pi r^3 R^4 2I_{eff}^2 \frac{z}{(R^2 + z^2)^4} \frac{1}{2} \vec{e}_z. \quad (8)$$

Pri  $z = h$  težina  $\vec{G}$  kugle uravnotežava silu  $\vec{F}_{sr}$ , pri čemu je

$$\vec{G} = -\rho \frac{4}{3}\pi r^3 g \vec{e}_z, \quad (9)$$

gde je  $g$  ubrzanje zemljine teže. Uslov ravnoteže je zadovoljen kada je

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{8}{9} \frac{\rho g}{\mu_0} \frac{R^4}{h} \left[1 + \frac{h^2}{R^2}\right]^4}. \quad (10)$$

Ova efektivna vrednost struje obezbedjuje levitaciju kuglice nad konturom, na visini  $h$ .

b) Izvršimo izračunavanje. Polazeći od formule (10) dobijamo  $I_{eff} = 2252 \text{ A}$ .

#### Pitanja i komentari

Pod elektromagnetskom levitacijom se podrazumeva lebdenje tela izazvano vertikalnom silom koju metalno telo oseća kad se nadje u naizmeničnom magnetskom polju, kao što je to bio slučaj u ovom zadatku.

Efektivna dubina prodiranja magnetskog polja u materijal kugle ocenjuje se pomoću formule (videti u udžbeniku paragraf §134)

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_0}}, \quad (11)$$

gde je  $\rho$  specifična električna otpornost (za bakar,  $\rho_{Cu} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ ). U našem slučaju je  $\delta = 0,1 \text{ mm}$ , pa je opravdana pretpostavka koju smo koristili na početku, da je  $\delta \ll 1$ .

Ako bismo uzeli da kontura ima  $N$  navoja, onda bi bilo

$$NI_{eff} = \sqrt{\frac{8}{9} \frac{\rho g}{\mu_0} \frac{R^4}{h} \left[1 + \frac{h^2}{R^2}\right]^4}, \quad (12)$$

pa bi telo levitalo uz manje jačine struje. Na primer, pri  $N = 10$  bilo bi  $I_{eff} = 225,2 \text{ A}$ .

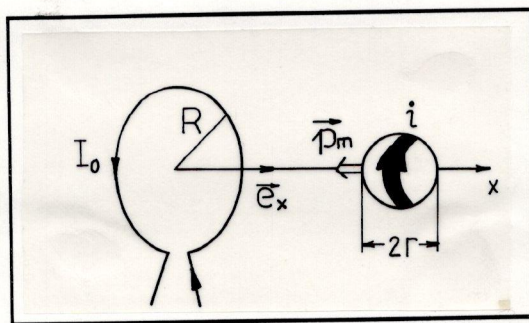
Uspešni školski demonstracioni eksperimenti sa levitacijom tela mogu se izvoditi i pomoću priručnih kalemova, na primer sa transformatorskim namotajima.

---

### 79.

---

Po kružnoj konturi teče naizmenična struja jačine  $i = I_0 \cos(\omega t)$ . Radijus konture je  $R$ . U blizini konture, na njenoj osi, nalazi se metalna kugla poluprečnika  $r$ . a) Proceniti promenu koeficijenta samoindukcije  $\Delta L$  nastalu prisustvom metalne kugle. b) Izračunati  $\Delta L$  ako je  $R = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ,  $r = 10^{-2} \text{ m}$  i  $x \ll r$  (Slika 79).



Slika 79

## Rešenje

a) U zadatku 78 našli smo izraz za srednju silu odbijanja kugle

$$\vec{F}_{sr} = \frac{3}{4} \mu_0 \pi r^3 R^4 I_0^2 \frac{x}{(R^2 + x^2)^4} \vec{e}_x. \quad (1)$$

Iskoristićemo sada izraz koji određuje rad ponderomotornih sila u sistemu, pri konstantnoj vrednosti amplitude  $I_0$ , a koji sledi iz zakona održanja energije (videti udžbenik, paragraf §101)

$$\delta A = \frac{1}{2} I_{eff}^2 dL. \quad (2)$$

Pošto je  $I_{eff} = I_0 / \sqrt{2}$  i

$$\delta A = F_{sr} dx, \quad (3)$$

biće

$$\Delta L = \int \frac{4F_{sr}}{I_0^2} dx. \quad (4)$$

Smenom (1) u (4) dobijamo

$$\Delta L = 3\mu_0 \pi r^3 R^4 \int_x^\infty \frac{x}{(R^2 + x^2)^4} dx. \quad (5)$$

Integral se lako rešava smenom  $t = R^2 + x^2$ . Tada je  $x dx = dt/2$  i integral prelazi u

$$\frac{1}{2} \int_t^\infty \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{6} t^{-3}. \quad (6)$$

Prema tome, shodno relaciji (5), nalazimo

$$\Delta L = \frac{\mu_0 \pi r^3 R^4}{2(R^2 + x^2)^3}. \quad (7)$$

Očividno, prisustvo metala oko konture može prilično da menja induktivnost konture.

b) Izračunajmo promenu koeficijenta induktivnosti. Dobijamo  $\Delta L = 4,9 \text{ nH}$ .

#### Pitanja i komentari

U literaturi se može naći podatak (na primer, u knjizi *I. E. Tamm, Fundamentals of the Theory of Electricity, Mir Publishers, Moscow 1979, p. 407*) da je koeficijent samoindukcije kružne strujne konture

$$L = R \left\{ \mu_0 \left[ \ln \left( \frac{8R}{d} \right) - 2 \right] + \frac{1}{4} \mu_0 \right\}, \quad (8)$$

gde je  $d$  debljina žice. Za procenu uzмимо da je  $d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Onda nalazimo

$$L \simeq 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ H}. \quad (9)$$

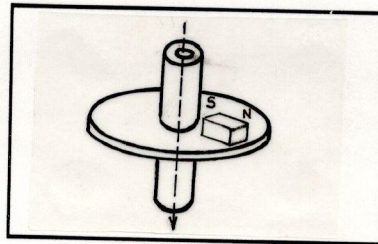
Vidimo da je  $\Delta L$  desetak procenata od vrednosti koeficijenta samoindukcije; blizina kugle zaista bitno menja induktivnost u sistemu. Ovaj je efekat u osnovi rada mnogih detektora metala (na primer, oružja) koji se primenjuju u sistemu kontrole bezbednosti u saobraćaju, na skupovima i sl. Promena induktivnosti se može, pomoću elektronskih uređaja, transformisati u adekvatan, lako prepoznatljiv signal (zvučni ili svetlosni).

## GLAVA SEDMA

## MAKSVELOVA TEORIJA

## 80.

Horizontalni aluminijumski disk pričvršćen je za vertikalnu cev od istog materijala. Stalni magnet NS fiksiran je za disk (Slika 80). Osa magneta seče osu cevi. Sistem može da rotira oko vertikalne ose cevi. Može li struja jačine  $i$ , koja teče provodnikom koji je postavljen u aluminijumsku cev, izazvati rotaciju sistema?



Slika 80

## Rešenje

Poslužimo se pojmom jačine magnetskog pola  $m$  za stalni magnet. Po definiciji, na pol deluje sila u spoljašnjem magnetskom polju indukcije  $\vec{B}$  po formuli (o formalnoj teoriji magnetizma videti u udžbeniku paragraf §113)

$$\vec{F} = m \vec{B}. \quad (1)$$

To znači da na južni pol S u konfiguraciji sa Slike 80 deluje sila usmerena suprotno kretanju kazaljke na satu, intenziteta

$$F_S = mB(r_1). \quad (2)$$

Ovde je  $r_1$  rastojanje pola od provodnika sa strujom, a  $B(r_1)$  magnetska indukcija na mestu pola, koju stvara struja  $i$ . Na sličan način, na severni pol N deluje sila

$$F_N = mB(r_2), \quad (3)$$

ali je ona suprotno usmerena, poklapa se sa smerom kazaljke na satu. Nadjimo ukupni momenat sile. Biće

$$M = mr_1B(r_1) - mr_2B(r_2). \quad (4)$$

Znamo da izračunamo magnetsku indukciju oko pravog provodnika sa strujom

$$B(r_1) = \mu_0 \frac{i}{2\pi r_1}, \quad B(r_2) = \mu_0 \frac{i}{2\pi r_2}. \quad (5)$$

Odmah vidimo da je  $r_1 B(r_1) = r_2 B(r_2)$  te je stoga  $M = 0$ . Posmatrani sistem neće zarotirati.

#### Pitanja i komentari

Menja li šta situaciju ako polovi promene mesta?

Kada bi se u eksperimentu rotacija mogla opaziti, to bi značilo da valja posumnjati u Bio-Savar–Laplasov zakon

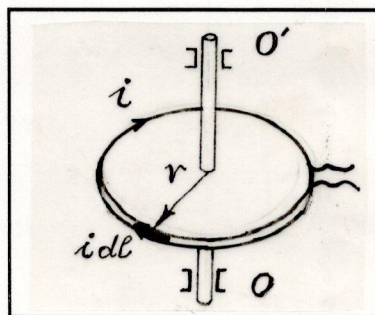
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i d\vec{\ell} \times \vec{r}}{4\pi r^3}. \quad (6)$$

(Zašto?) S te tačke gledišta, na opisani opit se može gledati kao na magnetsku analogiju opita Kevendišovog tipa (videti u udžbeniku paragraf §28).

Zanimljivu proširenu analizu ovih ideja čitalac može naći u članku *Milton O. Peach and Leland K. Shirely, What Ampère could have done: A simple demonstration of the Biot-Savart and magnetic force laws, Am. J. Phys. 50(5), May 1982.*

### 81.

Metalna žica fiksirana je po obodu plastičnog diska. Po toj konturi teče struja jačine  $i$ . Disk ima samo jedan stepen slobode kretanja: može rotirati oko vertikalne ose  $OO'$  (Slika 81). Kakvim magnetskim poljem je moguće disk zarotirati?



Slika 81

#### Rešenje

Disk sa strujom po obodu će zarotirati ako se javi tangencijalna komponenta sile  $d\vec{F}_t$ , na strujni elemenat  $idl$ , pa se formira moment sile

$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F}_t$ . To bi bilo ostvarljivo ako imamo takvo magnetsko polje da je za datu magnetsku indukciju  $\vec{B}$  na mestu strujnog elementa

$$\vec{F} \cdot id\vec{\ell} \neq 0. \quad (1)$$

Ali, pošto je u opštem slučaju proizvoljnog magnetskog polja

$$d\vec{F} = id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad (2)$$

i pošto je u vektorskoj analizi poznat rezultat  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$  vidimo da će, zbog fakta

$$(d\vec{\ell} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad (3)$$

biti

$$d\vec{F} \cdot id\vec{\ell} = 0, \quad (4)$$

što je u kontradikciji sa relacijom (1). Dakle, ma kako formirali okolno magnetsko polje i ma kakvo to polje bilo, disk će mirovati. To pokazuju svi dosadašnji opiti. Protivan ishod značio bi obaranje postulata (2).

#### Pitanja i komentari

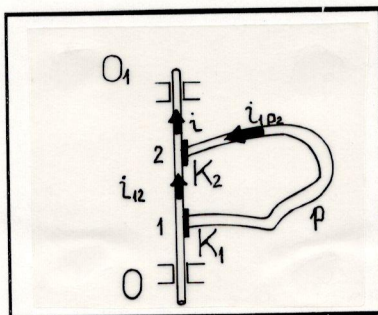
Ovaj zadatak (kao i dva druga, pod brojevima 80 i 82) iznosi jednu od osnovnih ideja i eksperimentalnih zamisli kojih su morali biti svesni klasici elektromagnetizma, pre svih Amper i Maksvel, u periodu formiranja učenja o fundamentalnim zakonitostima električnog i magnetskog polja u nepokretnim sredinama.

---

#### 82.

---

Posmatrajmo pravi vertikalni provodnik sa strujom jačine  $i$ . Između tačaka 1 i 2 (Slika 82) priključen je drugi provodnik pomoću klizajućih kontakata  $K_1$  i  $K_2$ , te deo 1p2 može slobodno da rotira oko vertikalne ose  $OO_1$  koja se poklapa sa vertikalnim provodnikom. U čvoru 1 struja se grana ( $i = i_{12} + i_{1p2}$ ). Izborom dužine savijenog provodnika kao i izborom materijala od kojega je napravljen, može se menjati odnos  $i_{1p2}/i$ . Može li se za bilo koji odnos te dve struje dogoditi da primetimo rotaciju savijenog provodnika oko ose  $OO_1$ ? Savijeni provodnik leži u ravni crteža.



Slika 82

## Rešenje

Uočimo jedan strujni element  $id\vec{l}$  savijenog provodnika. Na tom mestu daje pravi provodnik magnetsko polje indukcije  $\vec{B}$ , takvo da je

$$id\vec{l} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1)$$

Na taj element deluje sila

$$d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (2)$$

Odavde odmah proizilazi da je

$$d\vec{F} \cdot \vec{B} = i \left( d\vec{l} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{B}. \quad (3)$$

Ali je desna strana ove relacije uvek jednaka nuli (budući da je - kao što se uči u vektorskoj analizi - mešoviti vektorski proizvod uvek jednak nuli ako su dva vektora identična). Tako zaključujemo da je

$$d\vec{F} \cdot \vec{B} = 0. \quad (4)$$

Ovo znači da ne postoji komponenta sile  $d\vec{F}_B$  paralelna indukciji  $\vec{B}$ . Tako, nema ni momenta sile  $\vec{r} \times d\vec{F}_B$  koji bi mogao izazvati rotaciju u sistemu.

## Pitanja i komentari

Činjenica da do danas ne znamo za opit koji bi pokazao da je moguća rotacija pod opisanim uslovima potvrđuje relaciju za silu u obliku (2). U suprotnom, taj postulat bi bio doveden u sumnju.

## 83.

a) U knjigama iz elektromagnetike se ističe da je manifestacija magnetskog polja čisto relativistički efekt. Objasniti. b) Takodje, kaže se da je magnetizam u celosti kvantni efekt. Objasniti.



## Rešenje

a) Posmatrajmo neko naelektrisanje  $q$  u referentnom sistemu  $S$  u kojem ono miruje. U tom sistemu postoji samo električno polje. U drugom nekom inercijalnom sistemu  $S'$ , koji se kreće brzinom  $v$  u odnosu na sistem  $S$ , javilo bi se i magnetsko polje shodno transformacionim formulama

$$B'_x = 0, \quad B'_y = \frac{0 + vE_z/c_0^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad B'_z = \frac{0 - vE_y/c_0^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1)$$

Ako bi fizička realnost u suštini bila galilejevske prirode, nerelativistička, tj. ako bi brzina svetlosti bila neograničena veličina, ove jednačine bi u stvari tvrdile da magnetskog polja uopšte i nema ( $B'_x = B'_y = B'_z = 0$ ). Ovo važi pod uslovom da je tačno današnje stanovište fizike o nepostojanju magnet-skih opterećenja u Prirodi. Tako, magnetizam je relativistička manifestacija i to je fizička činjenica univerzalnog karaktera.

Magnetsko polje oko metalnog provodnika sa strujom formira se kretanjem ogromnog broja slobodnih elektrona (procenjuje se da je njihova koncentracija  $10^{28} \text{ m}^{-3}$ ), pa iako im je pokretljivost mala (oko  $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$ ) sumarni efekat je sasvim uočljiv. To magnetsko polje je i relativno lako merljivo, budući da električno polje skoro sasvim odsustvuje (delovanje negativnih elektrona praktično je u celosti kompenzovano protivdejtvom pozitivnih protona). Uostalom mi smo već imali jednu procenu električnih i magnetskih efekata u zadatku 18. "Skoro celovita kompenzacija električnih opterećenja dopustila je fizičarima da izuče relativističke efekte (tj. magnetizam) i otkriju *pravilne* zakone. To je uzrok da posle formiranja teorije relativnosti nije bilo neophodno prepravljjanje zakona elektromagnetizma, za razliku od Njutnovih zakona mehanike." (Reči I. E. Irodova u knjizi *Osnovni zakoni elektromagnetizma*, Moskva 1983).

b) Kvant magnetskog momenta, Borov magneton  $\mu_B$ , iznosi

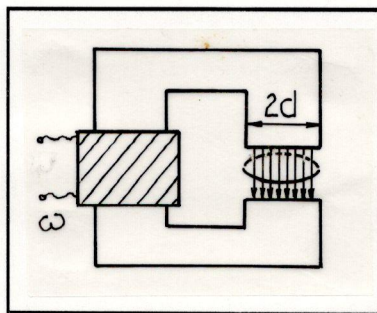
$$\mu_B = \frac{e}{m} \frac{h}{4\pi}. \quad (2)$$

Mada ima izvanredno malu vrednost  $\mu_B = 9,283 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$ , on je jedna od fundamentalnih karakteristika u mikrosvetu, slično masi i naelektrisanju. Vidimo da je Borov magneton proporcionalan Plankovoj konstanti  $h$ . Znamo da opisivanje pojava u duhu klasične fizike podrazumeva granični prelaz  $h \rightarrow 0$ . (Na primer, Plankova formula zračenja apsolutno crnog tela prelazi u Rejli-Džinsovu formulu kada  $h \rightarrow 0$ .) Ali to znači da, tada, uzimamo da je takodje  $\mu_B$  iščezavajuće malo ( $\mu_B \rightarrow 0$ ), tj. u osnovi negiramo izvor bilo kakvog magnetizma. *U klasičnoj fizici je magnetizam principijelno negiran.* S druge strane, pošto je magnetizam eksperimentalni fakt, njegova priroda je isključivo kvantna.

Do kraja konzistentno, u klasičnoj fizici se ne može stići ni do pojma dijamagnetizma, ni do pojma paramagnetizma. Na datoj temperaturi postoji unikatno ravnotežno stanje nekog fizičkog sistema (na primer, skupa molekula u nekom sudu) na koje ne može uticati spoljašnje magnetsko polje. Magnetskim poljem mogu se inicirati procesi koji vode dija- ili paramagnetizmu, ali proces relaksacije sistema, u doslednoj klasičnoj slici, vodiće formiranju ravnotežnog stanja koje neće "pamtiti" bilo kakav uticaj magnetskog polja. Jedino kvantna teorija može dosledno objasniti eksperimentalne fakte vezane za magnetizam.

## 84.

Elektromagnet se napaja vremenski promenljivom strujom. Polovi su kružni, poluprečnika  $d$ . Pretpostavimo da strogo izmedju polova deluje magnetsko polje indukcije  $\vec{B}$ , a da ono u okolnom prostoru ne postoji. U magnetsko polje smo ubacili žičanu konturu poluprečnika  $r$  koju silnice presecaju pod pravim uglom (Slika 84a). a) Odrediti jačinu električnog polja u konturi za  $r < d$ . b) Odrediti polje  $i$  za  $r > d$ . c) Odrediti jačinu električne struje  $i$  u konturi ako je ukupna otpornost kola  $R$ . d) Izračunati  $i$  ako je  $r = d = 5$  cm,  $R = 1 \Omega$  i  $dB/dt = 100$  T/s.



Slika 84a

## Rešenje

a) Pošto je promenljiva struja napajanja elektromagneta, indukcija  $\vec{B}$  i fluks kroz konturu  $\Phi$  zavise od vremena. Po Maksvelovom zakonu u konturi deluje e.m.s.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Solenoidno električno polje  $\vec{E}$  povezano je sa e.m.s. na poznati način:

$$\mathcal{E} = \oint E_t dl. \quad (2)$$

Integrali se po zatvorenoj kružnoj konturi i kako se linija sile električnog polja poklapa sa tom kružnicom, biće  $E_t = E$ . Uz to,  $E$  ima istu vrednost u svim tačkama kružnice. Prema tome je

$$\oint E_t d\ell = 2\pi r E. \quad (3)$$

Uzećemo još u obzir da je

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}, \quad (4)$$

da bismo definitivno imali

$$E_{r < d} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (5)$$

(Ispustili smo znak minus, koji jedino govori o smeru električnog polja.)

b) Ako kontura obuhvata prostor s magnetskim poljem a sama se nalazi izvan magnetskog polja, tj. kad je, po našim pretpostavkama,  $r > d$ , biće

$$\mathcal{E} = 2\pi r E = \pi d^2 \frac{dB}{dt}. \quad (6)$$

Oдавde dobijamo

$$E_{r > d} = \frac{d^2}{2r} \frac{dB}{dt}. \quad (7)$$

c) Za jačinu struje nalazimo

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (8)$$

Za  $r < d$ , bilo bi

$$i = \frac{1}{R} 2\pi r E_{r < d}, \quad (9)$$

a za  $r > d$  je

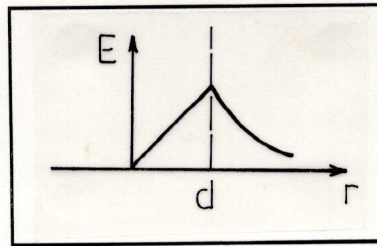
$$i = \frac{1}{R} 2\pi r E_{r > d}. \quad (10)$$

d) Relacija (9) (naravno i (10)), daće  $i = 785 \text{ mA}$ .

#### Pitanja i komentari

Zanimljivo je skicirati jačinu električnog polja prema jednačinama (5) i (7) (Slika 84b). Polje linearno raste u oblasti  $0 < r < d$ , dakle tamo gde je

$B \neq 0$ , a onda opada po inverznom zakonu za  $r > d$ . Formalno, kriva liči na grafik magnetske indukcije koju daje strujni provodnik konačne debljine. Onako kako struja formira magnetsko polje oko sebe, tako i magnetska indukcija formira električno polje u prostoru. Promenljivo magnetsko

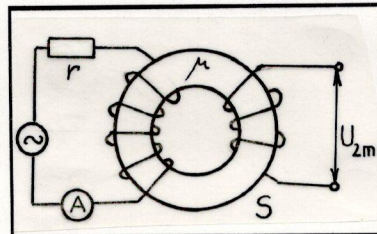


Slika 84b

polje u stanju je da kreira električno polje i u oblasti gde je  $B = 0$ , baš kao što struja daje magnetsko polje i u tačkama gde je  $i = 0$ .

## 85.

Primar transformatora ima  $N_1 = 500$  navoja motanih na torusnom jezgru kružnog poprečnog preseka (Slika 85) površine  $S = 10^{-2} \text{ m}^2$ . Dužina srednje linije torusa je  $\pi/2 \text{ m}$ . Sekundar ima  $N_2 = 10^4$  navoja motanih tesno na primarni kalem, koji ima omsku otpornost  $r = 0,5 \Omega$ . Sekundar je u tzv. praznom hodu. Kad se primar priključi na izvor naizmeničnog napona kružne učestanosti  $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$ , efektivna vrednost struje u primaru je  $I_{eff} = 1,4 \text{ A}$ . a) Odrediti koeficijent samoindukcije primara. b) Odrediti  $U_{2m}$ , maksimalnu vrednost napona sekundara. Magnetska permeabilnost je  $\mu = 25$ .



Slika 85

## Rešenje

a) Koeficijent samoindukcije potražimo preko odgovarajuće formule za torusni namotaj

$$L_1 = \mu_0 \mu \frac{N_1^2 S}{\ell} \simeq 0,05 \text{ H} . \quad (1)$$

b) Po Omovom zakonu za naizmeničnu struju (videti udžbenik, paragraf

§220) važiće

$$U_{1m}^2 = \left(\sqrt{2} I_{eff}\right)^2 [r^2 + \omega^2 L_1^2] , \quad (2)$$

pa je  $U_{1m} \simeq 31$  V. Kako je kod transformatora (videti udžbenik, paragraf §133)

$$\frac{U_{1m}}{U_{2m}} = \frac{N_1}{N_2} , \quad (3)$$

za napon u sekundaru nalazimo

$$U_{2m} = \frac{N_2}{N_1} U_{1m} , \quad (4)$$

ili brojčano  $U_{2m} = 620$  V.

#### Pitanja i komentari

Koja uprošćenja i idealizacije omogućuju da upotrebimo formule (2) i (3)?

### 86.

Kad u Maksvelovim jednačinama ne bi postojala struja pomeraja, bila bi narušena i jednačina kontinuiteta. Pokazati.

#### Rešenje

Posmatrajmo Maksvelovu jednačinu

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho . \quad (1)$$

Uzimajući parcijalni izvod po vremenu, dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{div} \vec{D} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} . \quad (2)$$

Iz Maksvelove jednačine

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} , \quad (3)$$

primenom operatora divergencije dobijamo

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} . \quad (4)$$

Kako je (uvek) divergencija rotora nekog vektora jednaka nuli, biće

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}. \quad (5)$$

Smenom jednačine (2) u (5) nalazimo definitivno

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (6)$$

a to je poznata jednačina kontinuiteta (videti u udžbeniku paragraf §54).

Ako bi struja pomeraja (tj. parcijalni izvod po vremenu električnog pomeraja) bila jednaka nuli u principu, tada bi taj član nedostajao u jednačini (3), samim tim ne bi se definitivno pojavio ni parcijalni izvod po vremenu prostorne gustine naelektrisanja; jednačina (5) bi tada prosto tvrdila da je divergencija gustine struje jednaka nuli u svakom slučaju, što opovrgavaju eksperimentalni fakti i celokupno iskustvo elektromagnetizma.

#### Pitanja i komentari

Koje matematičke pretpostavke dopuštaju promenu redosleda parcijalnog diferenciranja po vremenu i po koordinatama i gde su u našem izvodenju takve predostrožnosti neophodne?

---

### 87.

---

U sfernom koordinatnom sistemu  $(r, \varphi, \theta)$  posmatrajmo magnetsko polje indukcije  $\vec{B} = B_r \vec{e}_r$ . Na koji način možemo kreirati magnetsko polje koje zadovoljava sledeća dva uslova: a)  $\vec{B}$  ne zavisi od ugaonih koordinata  $\varphi$  i  $\theta$ ; b)  $B_r$  je rastuća pozitivna funkcija radijalne koordinate  $r$ ?

#### Rešenje

Napišimo izraz za divergenciju magnetske indukcije u sfernim koordinatama

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta \sin \theta) \right]. \quad (1)$$

Kako po uslovu zadatka pod a) možemo odbaciti parcijalne izvode po  $\varphi$  i  $\theta$ , prethodni se izraz svodi na

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B_r). \quad (2)$$

Kako je

$$\frac{d}{dr} (r^2 B_r) = \left( 2r B_r + r^2 \frac{dB_r}{dr} \right), \quad (3)$$

a po uslovu  $b$ ) je  $dB_r/dr > 0$ , vidimo da se desna strana relacije (2) ne može anulirati, tj.

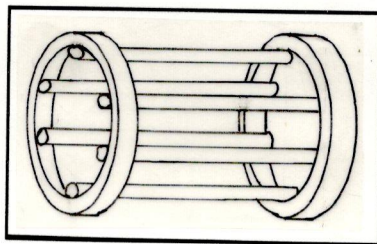
$$\operatorname{div} \vec{B} \neq 0. \quad (4)$$

Ali je ovaj zahtev suprotan Maksvelovoj jednačini  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ . Dobijena kontradikcija pokazuje da nije moguće realizovati sferno-simetrično i rastuće magnetsko polje, tj. idealnu *magnetsku bocu* (u terminima fizike jonizovanog gasa).

Maksvelova jednačina  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  dopušta da uvedemo vektorsku funkciju  $\vec{A}$  shodno zahtevu da je  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ . Povremeno su se vodile diskusije na temu ima li veličina  $\vec{A}$  samostalnu fizičku suštinu ili je ona samo pomoćna matematička veličina. Pošto je van torusa  $\vec{B} = 0$  a  $\vec{A} \neq 0$ , postavljaju se opiti tzv. Bohm-Aharonovog tipa u kojima se želi pokazati da veličina  $\vec{A}$  može uticati na ishod opita i tamo gde je inače  $\vec{B} = 0$ .

#### Pitanja i komentari

U nastojanju da realizuju kontrolisanu termonuklearnu fuziju, fizičari pokušavaju, između ostalog, da konfiniraju toplu plazmu jakim magnetskim poljima. Teorija pokazuje da bi u tom smislu bila poželjna magnetska polja koja zadovoljavaju tzv. *princip minimuma B*. U ovom zadatku smo (u osnovnim crtama) pokazali da se taj princip egzaktno ne može realizovati. Postoje približna rešenja. Na Slici 87 vidimo konfiguraciju koju je svojevremeno predložio sovjetski fizičar M. Jofe. Magnetsko polje se kreira pomoću dva kalema i šest pravolinijskih provodnika. Provodnici su smešteni simetrično u odnosu na osu koja prolazi kroz centre kalemova. Struje u susednim provodnicima imaju suprotan smer. Kao rezultat superpozicije polja formira se resultantno polje koje, približno, raste u svim pravcima od centralnog dela "posude" gde treba da se konfinira i zagreva plazma.



Slika 87

## 88.

Neka u sistemu S koji miruje egzistira homogeno a) električno polje (koje recimo potiče od proizvoljnog sistema fiksnih opterećenja koja se nalaze na pločama kondenzatora) b) magnetsko polje. Naći elektromagnetsko polje koje vidi posmatrač u sistemu S' koji se kreće brzinom  $\vec{v}$  normalno na linije električnog (magnetskog) polja.

## Rešenje

Na osnovu relativističkih formula za transformaciju elektromagnetskog polja električno polje koje deluje u pokretnom sistemu glasi

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \frac{(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1)$$

dok za magnetsko polje imamo

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}/c^2)_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2)$$

Ovde smo sa  $\parallel$  ( $\perp$ ) označili paralelne (normalne) komponente električnog i magnetskog polja u odnosu na pokretni sistem, a  $c$  je brzina sverlosti u vakuumu. Relativistički faktor  $\beta$  jednak je  $v/c$ .

a) Pošto u ovom slučaju u sistemu S postoji samo električno polje, prethodne formule za sistem S' daju

$$\vec{E}' = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vec{B}' = \frac{-\vec{v} \times \vec{E}}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{-\vec{v} \times \vec{E}'}{c^2}. \quad (3)$$

Vidimo da u pokretnom sistemu pored električnog polja koje je uvećano za faktor  $1/\sqrt{1 - \beta^2}$  deluje i magnetsko polje (dato formulom (3)) koje nije postojalo u nepokretnom sistemu.

b) Sada u sistemu S deluje samo magnetsko polje pa transformacione formule impliciraju

$$\vec{E}' = \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \vec{v} \times \vec{B}', \quad \vec{B}' = \frac{\vec{B}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4)$$



Pored uvećanog magnetskog polja za faktor  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  u sistemu S' deluje i električno polje  $\vec{E}'$  (formula (4)) koje ne deluje u nepokretnom sistemu S.

Pitanja i komentari

Pokažite da oblici (1) i (2) zadovoljavaju princip relativnosti (udžbenik, paragraf §143).

89.

Dokazati da je skalarni proizvod  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije.

Rešenje

Ako podjemo od Lorencovih transformacija, za transformisane komponente električnog

$$E'_x = E_x, \quad (1a)$$

$$\sqrt{1-\beta^2} E'_y = E_y - v B_z, \quad (1b)$$

$$\sqrt{1-\beta^2} E'_z = E_z + v B_y, \quad (1c)$$

i magnetskog polja

$$H'_x = H_x, \quad (2a)$$

$$\sqrt{1-\beta^2} H'_y = H_y + v D_z, \quad (2b)$$

$$\sqrt{1-\beta^2} H'_z = H_z - v D_y, \quad (2c)$$

tada proizvod  $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = E'_x B'_x + E'_y B'_y + E'_z B'_z$  prelazi u

$$\begin{aligned} \vec{E}' \cdot \vec{B}' &= E'_x B'_x + E'_y B'_y + E'_z B'_z \\ &= E_x B_x + \frac{\mu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_y - v B_z) \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (H_y + v D_z) + \\ &\quad + \frac{\mu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_z + v B_y) \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (H_z - v D_y), \end{aligned}$$

što posle malo algebre i korišćenja relacija  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  i  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  daje

$$\begin{aligned} \vec{E}' \cdot \vec{B}' &= E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z \\ &= \vec{E} \cdot \vec{B}, \end{aligned} \quad (3)$$

čime je dokaz kompletiran.

## Pitanja i komentari

Polazeći od Lorencovih transformacija u vektorskom obliku

$$\vec{E}' = \vec{E}_x + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)_{\perp}, \quad (4a)$$

$$\vec{H}' = \vec{H}_x + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D} \right)_{\perp}, \quad (4b)$$

gde je

$$\vec{E}_{\perp} = \vec{E}_y + \vec{E}_z, \quad (5a)$$

$$\vec{D}_{\perp} = \epsilon_0 \vec{E}_{\perp}, \quad (5b)$$

$$\vec{H}_{\perp} = \vec{H}_y + \vec{H}_z, \quad (5c)$$

$$\vec{B}_{\perp} = \mu_0 \vec{H}_{\perp}, \quad (5d)$$

pokazati da važi  $\vec{E}' \cdot \vec{H}' = \vec{E} \cdot \vec{H}$  (ovde treba iskoristiti razvoj  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = a^2(\vec{b} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ ).

Na sličan način pokazati da je razlika  $E^2 - B^2$  takodje invarijantna u odnosu na Lorencove transformacije. Postoje li dublji fizički razlozi da pomenute kombinacije veličina  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  budu neosetljive na promene koordinatnih sistema?

## 90.

Naći elektromagnetno polje tačkastog opterećenja  $q$  koje se kreće konstantnom brzinom  $\vec{v}$  u odnosu na nepokretnog posmatrača.

## Rešenje

Označimo sa  $S'$  sistem koji je vezan za naelektrisanje  $q$  i neka se on kreće brzinom  $v$  duž  $x$  ose nepokretnog sistema  $S$ . U sistemu  $S'$  postoji samo električno polje

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} \vec{r}', \quad (1)$$

dok je magnetsko polje  $\vec{B}' = 0$ . Ako polje  $\vec{E}'$  razložimo na paralelnu  $\vec{E}'_{\parallel}$  i normalnu  $\vec{E}'_{\perp}$  komponentu u odnosu na pravac brzine

$$\vec{E}'_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x' \vec{e}'_x}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}, \quad (2a)$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y' \vec{e}'_y + z' \vec{e}'_z}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}, \quad (2b)$$

a zatim primenimo Lorencove transformacije za komponente elektromagnetnog polja

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \frac{(\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}')_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3a, b)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}, \quad \vec{B}_{\perp} = \frac{(\vec{B}' + \vec{v} \times \vec{E}'/c^2)_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3c, d)$$

kao i za koordinate

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (4a, b, c)$$

posle malo računa dobijamo

$$\vec{E}_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - v^2/c^2)(x - vt)\vec{e}_x}{((x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2))^{3/2}}, \quad (5a)$$

$$\vec{E}_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - v^2/c^2)(y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)}{((x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2))^{3/2}}, \quad (5b)$$

$$\vec{B}_{\parallel} = 0, \quad (5c)$$

$$\vec{B}_{\perp} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}. \quad (5d)$$

Ovde smo iskoristili činjenicu da se ortovi pri prelasku iz sistema S' u sistem S ne menjaju tj.  $\vec{e}_i = \vec{e}'_i$  ( $i = x, y, z$ ).

Ako u sistemu S sa  $\vec{R} = (x - vt)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  označimo radijus vektor tačke u kojoj računamo polje u odnosu na pokretno opterećenje a sa  $\Phi$  ( $\sin \Phi = \sqrt{y^2 + z^2}/R$ ) ugao koji vektor  $\vec{R}$  gradi sa vektorom brzine  $\vec{v}$  opterećenja  $q$  tada se zadnji skup relacija može zapisati u konciznom obliku

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \vec{R}}{R^3} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2 \sin^2 \Phi/c^2)^{3/2}}, \quad (6a)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{R}}{4\pi R^3} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2 \sin^2 \Phi/c^2)^{3/2}}. \quad (6b)$$

Dobijeni izrazi predstavljaju relativističke relacije za elektromagnetsko polje pokretnog opterećenja  $q$ .

**Pitanja i komentari**

U specijalnoj teoriji relativnosti postoji princip korespondencije koji kaže da relativistički izrazi za slučaj malih brzina  $v \ll c$  prelaze u klasične. Lako je videti da u ovoj aproksimaciji (6a) i (6b) postaju

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{R}}{R^3}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{R}}{4\pi R^3}, \quad (7a, b)$$

tj. dobijamo klasične izraze za električno i magnetsko polje pokretnog opterećenja  $q$ . Pored toga može se videti da se ovako napisane relativističke formule (6a) i (6b) razlikuju od klasičnih samo za multiplikacioni faktor  $(1 - v^2/c^2)/(1 - v^2 \sin^2 \Phi/c^2)^{3/2}$ . Skicirajte funkciju  $E = f(\Phi)$ . Koji je osnovni zaključak? (Uporedite rezultate sa paragrafom §143 u udžbeniku.)

## FIZIČKE KONSTANTE

<i>Naelektrisanje elektrona</i>	$e = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
<i>Električna konstanta</i>	$\varepsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
<i>Magnetska konstanta</i>	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
<i>Brzina svetlosti u vakuumu</i>	$c = 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
<i>Masa mirovanja elektrona</i>	$m_e = 9,1095 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
<i>Masa mirovanja protona</i>	$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
<i>Masa mirovanja neutrona</i>	$m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
<i>Specifično naelektrisanje elektrona</i>	$e/m_e = 1,7588 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$
<i>Gravitaciona konstanta</i>	$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
<i>Ubrzanje Zemljine teže</i>	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
<i>Plankova konstanta</i>	$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
<i>Bolcmanova konstanta</i>	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$



## LITERATURA

1. Edward M. Purcell, *Electricity and magnetism* Berkeley physics course- Volume 2, McGraw- hill book company, New York 1965.
2. D.I. Saharov *Zbornik zadataka iz fizike* (na ruskom), Prosvesćenije, Moskva 1973.
3. R.C. Cross, *Electricity and Magnetism*, London, Sidney 1976.
4. I.E. Irodov *Osnovni zakoni elektromagnetizma* (na ruskom), Viša škola , Moskva, 1983.
5. Dr Branko Popović, Dr Antonije Isaković, *Osnovi elektrotehnike 3, Zbirka pitanja i zadataka*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1979.
6. Clifford E. Swartz, *Phenomenal Physics*, John Willey & Sans, New York, 1981.
7. D.V. Savuhin *Opšti kurs fizike, tom III: Elektricitet* (na ruskom), Nauka, Moskva, 1977.
8. R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands *The Feynman, lectures on Physics*, Addison-Wesley publishing company, Massachusetts, 1970.
9. G.S. Landsberg *et all, Elektromagnetizam* (na ruskom), Nauka, Moskva, 1985.
10. F.W. Sears, *Elektricitet i magnetizam*, Naučna knjiga, Beograd, 1963.
11. E. Babić, R. Krsnik. M. Očko, *Zbirka rešenih zadataka iz fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 1978.
12. G. Dimić, M. Mitrinović, *Zbirka zadataka iz fizike*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1984.
13. J.V. Surutka, *Elektromagnetika*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1971.
14. K.B. Belov, N.G. Bočkarev, *Magnetizam na Zemlji i u kosmosu* (na ruskom), Nauka, Moskva, 1983.
15. B.D. Popović, *Zbornik problema iz elektromagnetike*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1972.
16. S.V. Vonsovski, *Magnetizam* (na ruskom), Nauka, Moskva, 1984.
17. I.A. Jakovljeva *et all, Zbirka zadataka iz opšteg kursa fizike*, Nauka, Moskva, 1977.
18. D.M. Ivanović, V. Vučić *Fizika II- elektromagnetika i optika*, Naučna knjiga, Beograd, 1973.
19. I.E. Tam, *Osnovi teorije elektriciteta* (na ruskom), Nauka, Moskva, 1966.

20. J.A. Cronin, D.F. Greienberg, V.L. Telegdi, *Graduate problems in physics with solutions*, Addison-Wesley publishing company, Massachusetts, 1969.
21. G.I. Ribakova, *Zbornik zadataka iz opšte fizike (na ruskom)*, Viša škola, Moskva, 1984.
22. V.G. Barjahtar, B.A. Ivanov, *Šta je magnetizam (na ruskom)*, Naukova dumka, Kijev, 1981.
23. W. Conrad, *Elektrotechnik, kurz un emprägsam*, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1980.
24. Y.V. Gofman, *Zakoni, formule i zadaci fizike (na ruskom)*, Nauka, Moskva, 1978.
25. I.V. Saveljev, *Kurs opšte fizike, tom 2: elektromagnetizam (na ruskom)*, Nauka, Moskva, 1978.
26. V.S. Voljkenštajn, *Zbornik zadataka iz opšteg kursa fizike (na ruskom)*, Nauka, Moskva, 1973.
27. Dr I. Janić, *Fizika, drugi deo*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1980.
28. A.I. Ahiezer, *Opšta fizika. Električne i magnetske pojave (na ruskom)*, Naukova dumka, Kijev, 1981.
29. I.V. Saveljev, *Zbornik pitanja i zadataka iz opšte fizike (na ruskom)*, Nauka, Moskva, 1988.
30. G.L. Trigg, *Crucial experiments in modern physics*, Von Nostrand Reinhold company, London, 1971.
31. J. Orear, *Physics*, Collier Macmillan Publishers, London, 1979.



