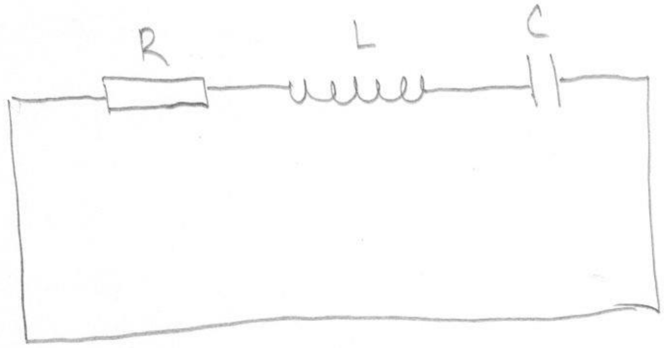
Задатак:

Извести израз за промену струје у току времена у колу са слике. У почетном тренутку у колу не тече струја, а облоге кондензатора су под напоном U_0. Увести фактор пригушења $\alpha = \frac{R}{2L}$, угаону фреквенцију $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и фактор амортизације $\xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$. Коментарисати решења за:

а) $\xi < 1$

б) $\xi = 1$

в) $\xi > 1$



Решење:

У овом колу струја настаје услед U_c на крајевима кондензатора. Том напону се супротставља ЕМС самоиндукције $L\frac{di}{dt}$.

$$i = \frac{U_c - L\frac{di}{dt}}{R}$$

Када струја тече у позитивном смеру кондензатор се празни:

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{dU_c}{dt}$$

$$iR = U_c - L\frac{di}{dt} \quad \Big|'$$

$$R\frac{di}{dt} = \frac{dU_c}{dt} - L\frac{d^2i}{dt^2}$$

$$\frac{dU_c}{dt} = -\frac{i}{C}$$

$$R\frac{di}{dt} = -\frac{i}{C} - L\frac{d^2i}{dt^2}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

- Томсонова формула

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{2R}{2L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

Решење[2]:

Како у колу нема извора ЕМС, пад напона на свим елементима кола мора бити:

$$U_R + U_L + U_C = 0.$$

Како је у питању редна веза, кроз све елементе тече иста струја $i(t)$.

$$i = \frac{U_R}{R} \qquad U_L = L\frac{di}{dt} \qquad C = \frac{q}{U_C} \qquad i = \frac{dq}{dt} \qquad dU_C = \frac{1}{C} i\,dt$$

$$U_R = i \cdot R \qquad U_C = \frac{q}{C} \qquad \frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} \qquad U_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$i \cdot R + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0 \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \quad |:L$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\delta\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$r_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$r_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$i_{(t)} = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

$$i = A e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + B e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

$$i = A e^{-\omega_0\left(\frac{\delta}{\omega_0} - \sqrt{\frac{\delta^2}{\omega_0^2} - 1}\right)t} + B e^{-\omega_0\left(\frac{\delta}{\omega_0} + \sqrt{\frac{\delta^2}{\omega_0^2} - 1}\right)t}$$

$$i = A e^{-\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} + B e^{-\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t}$$

$$i(t) = \left(A e^{w_0\sqrt{\xi^2-1}\,t} + B e^{-w_0\sqrt{\xi^2-1}\,t}\right) e^{-w_0\xi}$$

a) $\xi < 1 \Rightarrow \xi^2 - 1 < 0 = \sqrt{-(1-\xi^2)} = i\sqrt{1-\xi^2}$

$$i = \left(A e^{i w_0\sqrt{1-\xi^2}\,t} + B e^{-i w_0\sqrt{1-\xi^2}\,t}\right) e^{-w_0\xi}$$

$$i = \left(A e^{i w_0\sqrt{1-\frac{\delta^2}{w_0^2}}\,t} + B e^{-i w_0\sqrt{1-\frac{\delta^2}{w_0^2}}\,t}\right) e^{-\frac{\delta}{w_0}\cdot w_0 t}$$

$$i = \left(A e^{i\sqrt{w_0^2-\delta^2}\,t} + B e^{-i\sqrt{w_0^2-\delta^2}\,t}\right) e^{-\delta t}$$

$w_d^2 = w_0^2 - \delta^2$ – damped pezonance frequency

(пригушена фреквенција)

$$i = \left(A e^{i w_d t} + B e^{-i w_d t}\right) e^{-\delta t}$$

$$i = \left(A \cos w_d t + A i \sin w_d t + B \cos w_d t - B i \sin w_d t\right) e^{-\delta t}$$

$$i = \left(\underbrace{(A+B)}_{A'} \cos w_d t + \underbrace{(A-B) i}_{B'} \sin w_d t\right) e^{-\delta t}$$

$$i = \left(A' \cos w_d t + B' \sin w_d t\right) e^{-\delta t}$$

линеарне комб. sin и cos

$a \sin x + b \cos x = c \cdot \sin(x+\varphi)$

$t = 0 \quad i = 0$

$0 = A'$

$i(t) = C \cdot \sin(w_d t + \varphi) \cdot e^{-\delta t}$

$i = B' \sin w_d t \cdot e^{-\delta t}$

$i(t) = C \cdot e^{-\delta t} \sin(w_d t + \varphi)$

$i(t) = B' e^{-\delta t} \sin w_d t$

$B' = ?$

$t=0 \qquad V_c = V_0$

$$V_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$V_c = \frac{1}{C}\int B' e^{-\delta t} \sin\omega_d t \, dt$$

$$V_c = \frac{B'}{C}\int e^{-\delta t} \sin\omega_d t \, dt$$

$$\underline{\int e^{-\delta t}\sin\omega_d t\,dt} = -\frac{1}{\omega_d} e^{-\delta t}\cos\omega_d t - \int \left(-\frac{1}{\omega_d}\cos\omega_d t\right)\left(-\delta e^{-\delta t} dt\right) =$$

$e^{-\delta t} = u \qquad \sin\omega_d t\,dt = dv$

$-\delta e^{-\delta t} dt = du \qquad -\frac{1}{\omega_d}\cos\omega_d t = v$

$$= -\frac{1}{\omega_d} e^{-\delta t}\cos\omega_d t - \frac{\delta}{\omega_d}\int e^{-\delta t}\cos\omega_d t\,dt = -\frac{1}{\omega_d} e^{-\delta t}\cos\omega_d t - \frac{\delta}{\omega_d}\left(e^{-\delta t}\frac{1}{\omega_d}\sin\omega_d t - \int \frac{1}{\omega_d}\sin\omega_d t\left(-\delta e^{-\delta t}dt\right)\right)$$

$e^{-\delta t} = u \qquad \cos\omega_d t\,dt = dv$

$-\delta e^{-\delta t} dt = du \qquad \frac{1}{\omega_d}\sin\omega_d t = v$

$$\int e^{-\delta t}\sin\omega_d t\,dt = -\frac{1}{\omega_d} e^{-\delta t}\cos\omega_d t - \frac{\delta}{\omega_d^2} e^{-\delta t}\sin\omega_d t - \frac{\delta^2}{\omega_d^2}\underline{\int \sin\omega_d t\, e^{-\delta t}dt}$$

$$\int e^{-\delta t}\sin\omega_d t\,dt \left(1+\frac{\delta^2}{\omega_d^2}\right) = -\frac{1}{\omega_d} e^{-\delta t}\cos\omega_d t - \frac{\delta}{\omega_d^2} e^{-\delta t}\sin\omega_d t$$

$$V_c = \frac{B'}{C}\,\frac{1}{1+\frac{\delta^2}{\omega_d^2}}\left(-\frac{1}{\omega_d} e^{-\delta t}\cos\omega_d t - \frac{\delta}{\omega_d^2} e^{-\delta t}\sin\omega_d t\right)$$

$t=0 \qquad V_c = V_0$

$$V_0 = \frac{B'}{C}\,\frac{1}{1+\frac{\delta^2}{\omega_d^2}}\left(-\frac{1}{\omega_d}\right)$$

$$B' = V_0 \cdot C \cdot \left(1+\frac{\delta^2}{\omega_d^2}\right)\left(-\omega_d\right)$$

$$B' = -V_0\,\omega_d\,C\left(1+\frac{\delta^2}{\omega_d^2}\right)$$

$$i = -U_0 \omega_d C \left(1+\frac{\alpha^2}{\omega_d^2}\right) e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

$$i = -U_0 \frac{C}{\omega_d} \left(\omega_d^2 + \alpha^2\right) \cos\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\alpha t}$$

$$i_{(t)} = U_0 C \frac{\omega_0^2}{\omega_d^2} e^{-\alpha t} \cos\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{i_{(t)} = U_0 \frac{C}{\omega_d} \left(\omega_d^2 + \alpha^2\right) \cos\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\alpha t}}$$

b) $\xi = 1$; $\alpha = \omega_0$

$$r_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$r_{12} = -\alpha$$

$$i = Ate^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$

$t=0$ $i=0$

$$0 = B$$

$$i = Ate^{-\alpha t}$$

$t=0$ $U_c = U_0$

$$U_c = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

$$U_c = \frac{1}{C} \int A t e^{-\alpha t} dt$$

$$U_c = \frac{A}{C} \int t e^{-\alpha t} dt$$

$t = v$ $\quad e^{-\alpha t} dt = dv$

$dt = dv$ $\quad -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} = v$

$$U_c = \frac{A}{C}\left(t\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right) - \int \left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right) dt\right)$$

$$U_c = -\frac{A}{C\alpha} t e^{-\alpha t} + \frac{A}{C\alpha} \int e^{-\alpha t} dt$$

$$U_c = \frac{A}{C\alpha}\left(-te^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right)$$

$t=0$ $U_c = U_0$

$$U_0 = -\frac{A}{C\alpha^2}$$

$$A = -U_0 C \alpha^2$$

$$\boxed{i_{(t)} = -U_0 C \alpha^2 t e^{-\alpha t}}$$

b) $\xi > 1$

$$i(t) = \left(A e^{\omega_0 \sqrt{\xi^2-1}\, t} + B e^{-\omega_0 \sqrt{\xi^2-1}\, t}\right) e^{-\omega_0 \xi}$$

$$i = \left(A e^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\, t} + B e^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\, t}\right) e^{-\delta t}$$

$$i = \left(A e^{\omega_d t} + B e^{-\omega_d t}\right) e^{-\delta t}$$

$t=0 \quad i=0$

$$0 = A + B \quad \Rightarrow \quad A = -B$$

$$U_c = \frac{1}{C}\int i\, dt$$

$$U_c = \frac{1}{C}\int \left(A e^{\omega_d t} + B e^{-\omega_d t}\right) e^{-\delta t}\, dt$$

$$U_c = \frac{A}{C}\int e^{(\omega_d-\delta)t}\, dt + \frac{B}{C}\int e^{(-\omega_d-\delta)t}\, dt$$

$$U_c = \frac{A}{C}\frac{1}{\omega_d-\delta} e^{(\omega_d-\delta)t} + \frac{B}{C}\frac{1}{-\omega_d-\delta} e^{(-\omega_d-\delta)t}$$

$$U_c = \frac{A}{C}\frac{e^{(\omega_d-\delta)t}}{\omega_d-\delta} - \frac{B}{C}\frac{e^{-(\omega_d+\delta)t}}{\omega_d+\delta}$$

$$U_0 = \frac{A}{C}\frac{1}{\omega_d-\delta} - \frac{B}{C}\frac{1}{\omega_d+\delta}$$

$$U_0 = -\frac{B}{C}\frac{1}{\omega_d-\delta} - \frac{B}{C}\frac{1}{\omega_d+\delta}$$

$$U_0 = -\frac{B}{C}\frac{\omega_d+\delta+\omega_d-\delta}{\omega_d^2-\delta^2}$$

$$U_0 = -\frac{B}{C}\frac{2\omega_d}{\omega_d^2-\delta^2}$$

$$B = -U_0 C\frac{\omega_d^2-\delta^2}{2\omega_d}$$

$$i = \left(-Be^{\omega_d t} + Be^{-\omega_d t}\right)e^{-\delta t}$$

$$i = -B\left(e^{\omega_d t} - e^{-\omega_d t}\right)e^{-\delta t}$$

$$i = U_0 C\frac{\omega_d^2-\delta^2}{2\omega_d}e^{-\delta t}\left(e^{\omega_d t} - e^{-\omega_d t}\right)$$

а) пригушене осцилације

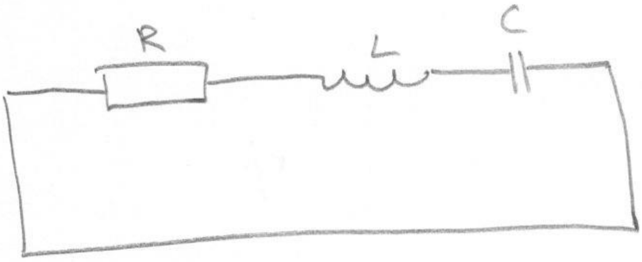
б) најбрже спада без осцилација

в) нема осцилација

Задатак:

На примеру редног RLC кола показати да системи са пригушеним осцилацијама губе енергију.

Решење:



$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = -\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\parallel \quad iR + \frac{q}{C} + 0 = -\frac{d}{dt}(iL)$$

$$U_R \qquad U_C \qquad U_L \qquad \varepsilon_{siL}$$

$$iR + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad /:L$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = -\frac{R}{L}\dot{q}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = -\frac{R}{L}\dot{q} \quad \Big| \, \dot{q}$$

$$\dot{q}\ddot{q} + \omega_0^2 \dot{q} q = -\frac{R}{L}\dot{q}^2$$

$$\frac{d}{dt}\dot{q}^2 = 2\dot{q}\cdot\ddot{q}$$

$$\dot{q}\ddot{q} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{q}^2$$

$$\frac{d}{dt}q^2 = 2q\dot{q}$$

$$q\dot{q} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}q^2$$

$$\frac{dE}{dt} = -P_R$$

Промена E је негативна у сваком тренутку, што значи да систем увек губи енергију

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{q}^2 + \omega_0^2 \frac{1}{2}\frac{d}{dt}q^2 = -\frac{R}{L}\dot{q}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \omega_0^2\frac{1}{2}q^2\right) = -\frac{R}{L}\dot{q}^2 \quad \Big| \cdot L$$

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{LC}\cdot Lq^2\right) = -Ri^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{E_L} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}_{E_C}\right) = -\underbrace{i^2 R}_{P_R}$$

$$\frac{d}{dt}\left(E_L + E_C\right) = -P_R$$

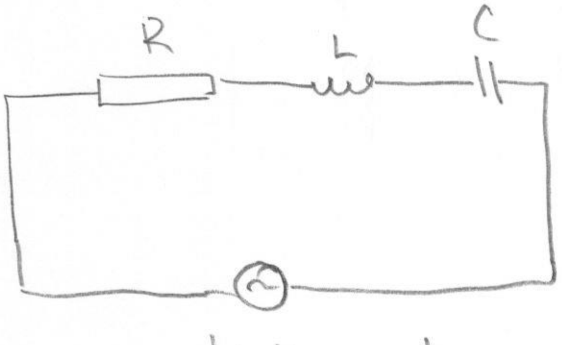
Задатак:

Дато је редно RLC коло код којег се побуђују принудне осцилације спољашњим извором ЕМС, датог у виду напонског генератора:

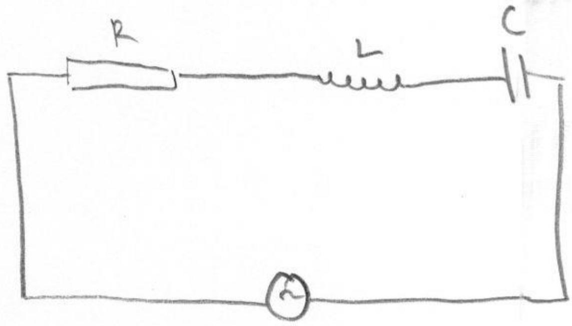
$$U_{(t)} = U_0 \sin \omega t,$$

где је U_0 - амплитудна вредност напона, а ω кружна учестаност осцилација напона.

Одредити услов настајања резонанције.



$U = U_0 \sin \omega t$



$U = U_0 \sin\omega t$

$$U = U_R + U_L + U_C$$

$$U = iR + L\frac{di}{dt} + U_C$$

$$i = \frac{dq_C}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{dU_C}{dt}$$

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{L}\frac{dU}{dt}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\delta\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L}\frac{dU}{dt}$$

$$\delta = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\delta\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{\omega}{L}U_0\cos\omega t$$

$$i = i_h + i_p$$

$$\frac{d^2 i_h}{dt^2} + 2\delta \frac{d i_h}{dt} + \omega_0^2 i_h = 0$$

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

$$r_{12} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$r_{12} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

$$r_{12} = -\delta \pm i\omega_d$$

$$i_h = A e^{(-\delta + i\omega_d)t} + B e^{(-\delta - i\omega_d)t}$$

$$i_h = A e^{-\delta t} e^{i\omega_d t} + B e^{-\delta t} e^{-i\omega_d t}$$

$$i_h = e^{-\delta t}\left(A e^{i\omega_d t} + B e^{-i\omega_d t}\right)$$

$$i_p = C \cdot \cos\omega t + D \sin\omega t$$

$$\frac{d i_p}{dt} = -C\omega \sin\omega t + D\omega \cos\omega t$$

$$\frac{d^2 i_p}{dt^2} = -C\omega^2 \cos\omega t - D\omega^2 \sin\omega t$$

$$-C\omega^2 \cos\omega t - D\omega^2 \sin\omega t +$$
$$+ 2\delta\left(-C\omega \sin\omega t + D\omega \cos\omega t\right) +$$
$$+ \omega_0^2\left(C \cos\omega t + D \sin\omega t\right) = \frac{\omega}{L} V_0 \cos\omega t$$

$$\underbrace{\left(-C\omega^2 + 2\delta D\omega + \omega_0^2 C\right)}_{\frac{\omega}{L} V_0} \cos\omega t + \underbrace{\left(-D\omega^2 - 2\delta C\omega + \omega_0^2 D\right)}_{0} \sin\omega t = \frac{\omega}{L} V_0 \cos\omega t$$

$$C\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + D \cdot 2\delta\omega = \frac{\omega}{L} V_0$$

$$D\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - C\, 2\delta\omega = 0$$

$$C \, 2\delta\omega = D(\omega_0^2 - \omega^2)$$

$$C = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega} D$$

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}(\omega_0^2 - \omega^2) D + 2\delta\omega D = \frac{\omega}{L} U_0$$

$$D\left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{2\delta\omega} + 2\delta\omega\right] = \frac{\omega}{L} U_0$$

$$D \, \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}{2\delta\omega} = \frac{\omega}{L} U_0$$

$$a \sin x + b \cos x = c \cdot \sin(x + \varphi)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \quad a > 0$$

$$D = \frac{2\delta}{L} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} U_0$$

$$C = \frac{\omega}{L} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} U_0$$

$$i = e^{-\delta t}(A' \sin \omega_d t + B' \cos \omega_d t) + C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

$$t \nearrow \quad e^{-\delta t} \to 0$$

$$i = C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$I_0 = \sqrt{C^2 + D^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{C}{D}$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{\omega^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^4}{L^2\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]^2}} \, U_0$$

$$I_0 = \frac{\omega}{L\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right]} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \, U_0$$

$$I_0 = \frac{\omega}{L}\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$I_0 = \frac{\omega}{L} \frac{U_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$I_0 = \frac{\omega}{L} \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}}$$

$$I_0 = \frac{\cancel{\omega}}{L}\,\frac{U_0}{\cancel{\omega}\sqrt{\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2}{L^2}}}$$

$$I_0 = \frac{1}{\cancel{L}}\,\frac{U_0}{\frac{1}{\cancel{L}}\sqrt{\frac{L^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+R^2}}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{L^2\left(\frac{1}{\omega LC}-\omega\right)^2+R^2}}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}$$

Ohm:

$$I = \frac{U}{R}$$

$$Z \equiv R \equiv \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{C}{D}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{\omega}{\cancel{L}}\,\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\cancel{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}}{\frac{2\delta}{\cancel{L}}\,\frac{\omega^2}{\cancel{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cancel{\omega}\,(\omega_0^2-\omega^2)}{2\delta\,\omega^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)}{2\,\frac{R}{2L}\,\omega}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{\omega}{L}\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)}{\frac{\omega}{L}\,R}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{\omega C}-\omega L}{R}$$

$$\frac{dI_0}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_{rez}$$

$$\frac{d}{d\omega}\left[\frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}\right] = U_0\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(2\underbrace{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)}_{=0 \;\vee}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{\omega^2 C} - L\right)}_{=0}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L = 0 \qquad \vee \; -\frac{1}{\omega^2 C} - L = 0$$

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L \qquad \frac{1}{\omega^2 C} = -L$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \qquad \omega^2 = -\frac{1}{LC}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \qquad \text{нема } \mathbb{R} \text{ решења}$$

$$\omega = \omega_0$$

Dogaтиак

$t=0 \quad i=0$

$0 = B' + C$

$\boxed{B' = -C}$

$q = \int i\,dt$

$q = \int e^{-\delta t}(A'\sin\omega_d t + B'\cos\omega_d t)\,dt + C\omega\sin\omega t - D\omega\cos\omega t$

$\int \cos ax\, e^{bx}dx = \frac{e^{bx}}{a^2+b^2}(a\sin ax + b\cos ax)$

$\int \sin ax\, e^{bx}dx = \frac{e^{bx}}{a^2+b^2}(b\sin ax - a\cos ax)$

$q = A'\frac{e^{-\delta t}}{\omega_d^2+\delta^2}(-\delta\sin\omega_d t - \omega_d\cos\omega_d t) + B'\frac{e^{-\delta t}}{\omega_d^2+\delta^2}(\omega_d\sin\omega_d x - \delta\cos\omega_d x)$

$+ C\omega\sin\omega t - D\omega\cos\omega t$

$t=0 \quad q=0$

$-\frac{A'}{\omega_d^2+\delta^2}\omega_d - \frac{B'}{\omega_d^2+\delta^2}\delta - D\omega = 0$

$\frac{A'}{\omega_d^2+\delta^2}\omega_d - \frac{C}{\omega_d^2+\delta^2}\delta - D\omega = 0$

$\frac{A'}{\omega_d^2+\delta^2}\omega_d = \frac{\delta}{\omega_d^2+\delta^2}C - D\omega$

$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2$

$\frac{A'}{\omega_0^2}\omega_d = \frac{\delta}{\omega_0^2}C - \omega D$

$A' = \frac{\omega_0^2}{\omega_d}\left(\frac{\delta}{\omega_0^2}C - \omega D\right)$

$\boxed{A' = \frac{\delta}{\omega_d}C - \frac{\omega_0^2\omega}{\omega_d}D}$

$$A' \sin \omega_d t + B' \cos \omega_d t = I_0' \sin(\omega_d t + \varphi')$$

$$I_0' = \sqrt{A'^2 + B'^2}$$

$$I_0' = \sqrt{\left(\frac{\delta}{\omega_d} C - \frac{\omega_0^2 \omega}{\omega_d} D\right)^2 + C^2}$$

$$I_0' = \sqrt{\left(\frac{\delta}{\omega_d}\,\frac{\omega}{L}\,\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2} - \frac{\omega_0^2\omega}{\omega_d}\,\frac{2\delta}{L}\,\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}\right)^2 U_0^2 + C^2}$$

$$I_0' = \sqrt{\left(\frac{\cancel{\delta}}{\omega_d}\,\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\cancel{\delta}\omega} D - \frac{\omega_0^2\omega}{\omega_d} D\right)^2 + \frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{4\delta^2\omega^2} D^2}$$

$$I_0' = \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2-2\omega_0^2\omega^2}{2\omega\omega_d}\right)^2 + \frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{4\delta^2\omega^2}}\; D$$

$$I_0' = \sqrt{\frac{\delta^2(\omega_0^2-\omega^2-2\omega_0^2\omega^2)^2+\omega_d^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}{4\delta^2\omega^2\omega_d^2}}\; D$$

$$I_0' = \frac{\sqrt{\delta^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 - 4\delta^2\omega_0^2\omega^2(\omega_0^2-\omega^2) + 4\delta^2\omega_0^4\omega^4 + \omega_d^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}}{2\delta\omega_d\omega}\; D$$

$$I_0' = \frac{\sqrt{\omega_0^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 - 4\delta^2\omega_0^2\omega^2(\omega_0^2-\omega^2) + 4\delta^2\omega_0^4\omega^4}}{2\delta\omega_d\omega}\; D$$

Задатак:

Испитати понашање R, L и C елемената кола, у колу наизменичне струје која се мења по закону:

$$i_{(t)} = I_0 \sin \omega t$$

Извести изразе за импедансе сваког елемента и одредити фазне помераје између струје и напона на сваком елементу кола понаособ.

Одредити импедансу и фазни померај редне везе R, L и C елемената у колу.

Решење:

Разматрамо електричне осцилације у колу где се струја мења по синусном закону:

$$i = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

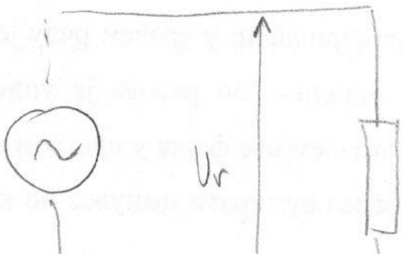
ω – кружна учестаност

φ – фаза осциловања

Отпорник у колу наизменичне струје

У колу имамо само отпорник отпорности r. Кроз њега тече струја нулте почетне фазе, амплитуде i_0 и кружне учестаности ω:

$$i = i_0 \sin \omega t$$



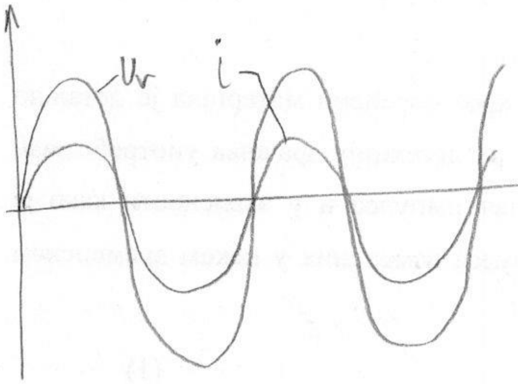
По Омовом закону напон на отпорнику $U_r = ri$

$$U_r = i_0 r \sin \omega t$$

Напон на отпорнику се такође мења по синусном закону.

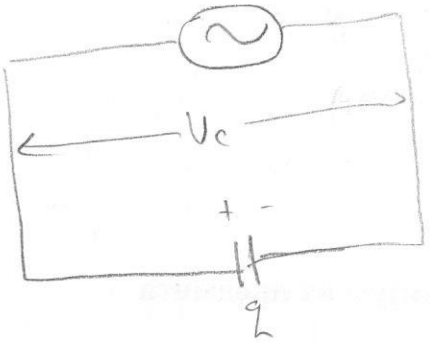
Не постоји разлика фаза између осцилација струје и напона.

Када је напон максималан и струја је максимална



Амплитуда на отпорнику $U_{r0} = i_0 r$

- Кондензатор у колу наизменичне струје -



У колу не постоје отпорници $r \to 0$

$$i = i_0 \sin \omega t$$

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int i\,dt = \int i_0 \sin \omega t\, dt$$

$$q = -\frac{i}{\omega} \cos \omega t$$

Напон на кондензатору је

$$U = \frac{q}{C}$$

$$U = -\frac{i_0}{\omega C} \cos \omega t$$

$$U = \frac{i_0}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ако струја у колу синусно осцилује, тако осцилује и напон на кондензатору, али фазно касни за струјом где је фазна разлика $\frac{\pi}{2}$

Амплитуда на кондензатору једнака је

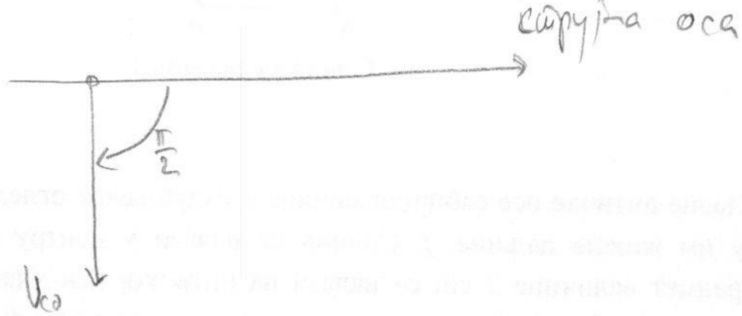
$$U_{c0} = \frac{i_0}{\omega C}$$

Ова релација формално личи на Омов закон за једносмерне струје. Улогу отпорности кондензатора за наизменичну струју игра величина

$$X_c = \frac{1}{\omega C}$$

и представља привидну капацитивну отпорност.

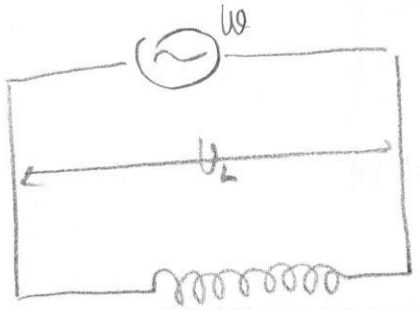
Векторски дијаграм



Капацитивна отпорност зависи од учестаности струје

За високе учестаности кондензатор је привидни отпорник незнатне отпорности

- Калем у колу наизменичне струје -



По Омовом закону

$$U_L = ir - \mathcal{E}$$

$\mathcal{E}$ – електромоторна сила самоиндукције $\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$

$$r \to 0$$

$$U_L = L\frac{di}{dt}$$

$$i = i_0 \sin\omega t$$

$$U_L = L i_0 \omega \cos\omega t$$

$$U_L = i_0 \omega L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Напон у калему фазно предњачи за $\frac{\pi}{2}$

Амплитуда напона на калему је

$$U_{L0} = i_0 \omega L$$

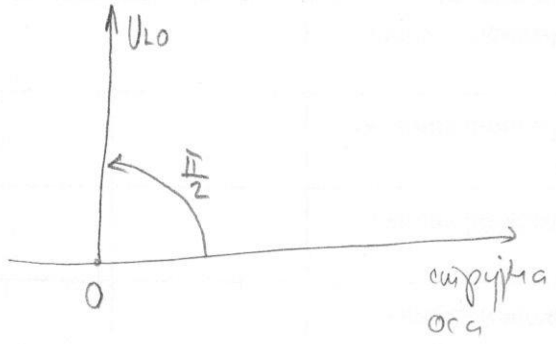
Можемо дефинисати привидну индуктивну отпорност калема

$$r_L = \omega L$$

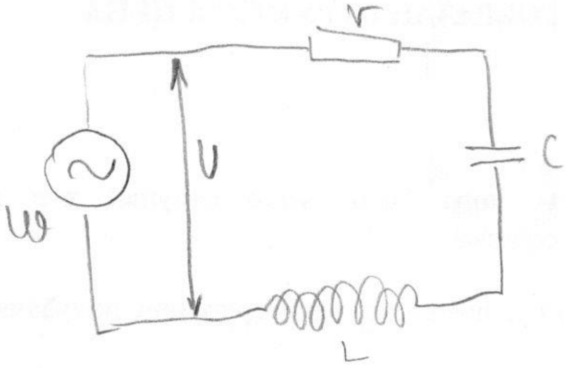
$$\Downarrow$$

$$U_{L0} = i_0 r_L$$

Амплитуде напона и струје повезује Омов закон



- Омов закон за наизменичне струје -

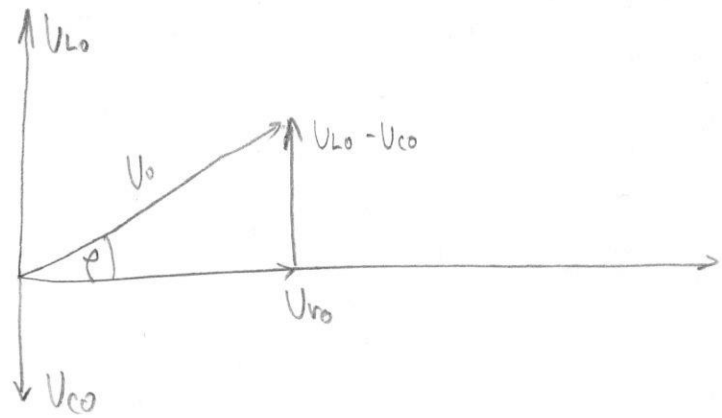


$$i = i_0 \sin \omega t$$

Напон U је збир три напона

- на отпорнику
- на кондензатору
- на калему

при чему се сваки од напона мења у времену по синусном закону. Саберимо методом дијаграма напона



$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

По Питагориној теореми U_0:

$$U_0^2 = U_{r0}^2 + (U_{L0} - U_{C0})^2$$

$$U_0 = \sqrt{i_0^2 r^2 + \left(i_0 \omega L - \frac{i_0}{\omega C}\right)^2}$$

$$U_0 = i_0 \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (*)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left[\frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{r0}}\right]$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left[\frac{i_0 \omega L - \frac{i_0}{\omega C}}{i_0 r}\right]$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}\right]$$

(*) - Омов закон за наизменичне струје

По аналогији са једносмерном струјом

$$R = \frac{U_0}{i_0} = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Активна отпорност кола, где се ослобађа Џулова топлота

$X = r$

Реактивна отпорност кола

$$Y = \frac{U_{L0} - U_{C0}}{I_0}$$

$$Y = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

На реактивној отпорности кола нема ослобађања Џулове топлоте; она може имати индуктивни карактер или капацитивни карактер

Резиме: Ohm за наизменичну струју

$U_* = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$

$U_0 = I_0 R$

$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

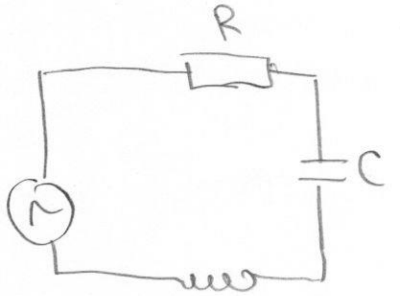
$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$

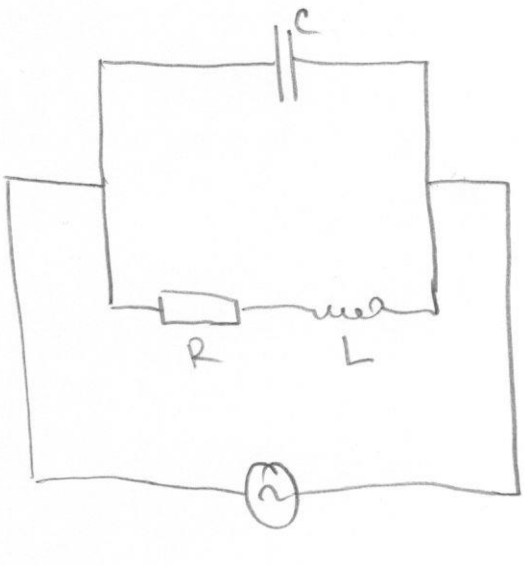
Задатак:

Извести изразе за комплексне импедансе на елементима R, L и C у колу наизменичне струје која се мења по закону:

$$i_{(t)} = I_0 \sin \omega t.$$

Применити добијене резултате на редну и паралелну везу елемената R, L и C као на сликама:





- Комплексне величине -

За слагање осцилација струје и напона у разним тренуцима наизменичне струје погодно је употребљавати метод у којем се хармонијске осцилације разних физичких величина представљају као комплексне величине

Математички подсетник

Комплексни бројеви

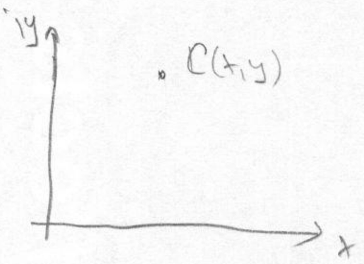
Комплексан број је облика $z = x + iy$, где су x и y реални бројеви, а i је имагинарна јединица за коју важи $i^2 = -1$.

x се назива реалан део комплексног броја z и означава се са $\mathrm{Re}\, z$

y се назива имагинарни део комплексног броја z и означава се са $\mathrm{Im}\, z$

$0 + iy$; $(0, y)$ - имагинаран број

$x + i0$; $(x, 0)$ - реалан број



$$z = x + iy$$

$\bar{z} = x - iy$ - конјуговано комплексан броју z

Нека је $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 = z_2 \quad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$$

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = 2x = 2\mathrm{Re}\, z$$

$$z - \bar{z} = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}\, z$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Комплексан број $z = x + iy = (x, y)$ може се геометријски представити као тачка $P(x, y)$ у равни. $\mathrm{Re}\, z$ се приказује на хоризонталној оси а $\mathrm{Im}\, z$ на вертикалној. Тачка P у равни се може приказати и у поларним координатама (r, φ)

$r = |z|$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Тригонометријски или поларни облик комплексног броја

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуо комплексног броја

φ – аргумент комплексног броја означава се

$\varphi = \arg z$

Аргумент комплексног није једнозначно одређен

$$\arg z = \varphi = \varphi + 2\pi = \varphi + 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Може се показати да је

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$\arg \bar{z} = -\arg z$$

Ојлерова формула:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

Сада можемо поларни облик комплексног броја z записати у форми

$$z = r e^{i\varphi}$$

- Комплексне величине наставак -

У Електромагнетизму пишемо

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$$

$j = \sqrt{-1}$; са i обележавамо струју

α - аргумент комплексног броја ; са φ обележавамо фазу

$$Z = \rho\, e^{j\alpha} \qquad Z = x + jy$$

$$x = \rho\cos\alpha$$

$$y = \rho\sin\alpha$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Нека се α мења по закону

$$\alpha = \omega t + \varphi$$

То значи да су x и y две хармонијске осцилације

$$x = \rho \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = \rho \sin(\omega t + \varphi)$$

Имајући у виду Ојлеров образац, ове две хармонијске осцилације можемо повезати са реалним, односно иматинарним делом истог комплексног броја

$$z = \rho e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Хармонијске осцилације можемо описивати:

а) тригонометријским функцијама Sin и Cos

б) комплексним изразима

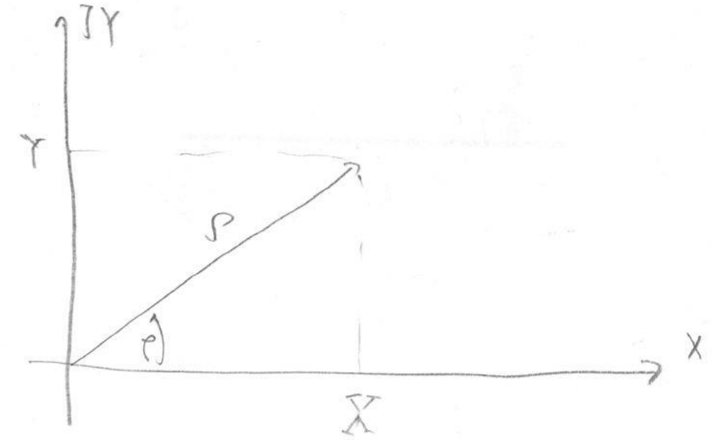
Метод б) има крупну предност када сабирамо неколико осцилација, јер су правила сабирања комплексних бројева знатно простија од правила сабирања тригонометријских функција

Ако је учестаност ω једнака за све посматране осцилације, могуће је истаћи временски део $e^{j\omega t}$. Тако хармонијска осцилација је потпуно дефинисана ако се зада само комплексна амплитуда

$$S = \rho e^{j\varphi}$$

$$z = \rho e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{\rho e^{j\varphi}}_{S} \cdot e^{j\omega t}$$

Модул комплексне амплитуде даје стварну амплитуду хармонијске осцилације (ρ) а аргумент почетну фазу осциловања (φ)



– Комплексне величине наизменичне струје.

Нека је $i = i_0 \sin \omega t$

Комплексни запис струје је:

$$i = i_0 e^{j\omega t}$$

– Напон на отпорнику је онда

$$U_r = ir$$

$$U_r = i_0 r e^{j\omega t}$$

Амплитуда на отпорнику је чисто реална

$$\rho = i_0 r \quad i \quad и$$

$$U_{r0} = i_0 r$$

– Напон на калему је

$$U_L = i_0 \omega L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_L = i_0 \omega L \, e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Комплексна амплитуда напона на калему је

$$U_L = \underbrace{i_0 \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}}_{U_{L0}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U_{L0} = i_0 \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$U_{L0} = j \omega L i_0$$

- Напон на кондензатору је

$$U_C = \frac{i_0}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

комплексни облик:

$$U_C = \frac{i_0}{\omega C} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

Комплексна амплитуда напона на кондензатору је:

$$U_C = \underbrace{\frac{i_0}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{U_{C0}} e^{j\omega t}$$

$$U_{C0} = \frac{i}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$U_{C0} = -j \frac{i_0}{\omega C}$$

- Комплексне отпорности -

Нека је $\tilde{I}_0$ амплитуда гачине струје у неком делу кола, а $\tilde{U}_0$ комплексна амплитуда напона. Тада је дефинициона релација комплексне отпорности Z тога дела

$$\tilde{U}_0 = Z\tilde{I}_0$$

Ако помножимо обе стране формуле са $e^{j\omega t}$ лако увиђамо да су и тренутне вредности напона и струје повезане на сличан начин преко комплексне отпорности

$$u(t) = Z\,i(t)$$

Ако део кола има:

- само активну отпорност r $\qquad Z_r = r$
- индуктивну $\qquad Z_L = j\omega L$
- грана са кондензатором $\qquad Z_C = +\frac{1}{j\omega C}$

– Импеданса сложеног кола –

Закони константне струје су применљиви не на стварне амплитуде наизменичне струје, већ на комплексне амплитуде тих величина, при чему за отпорности појединих делова кола морамо узети одговарајуће комплексне отпорности.

Неко коло наизменичне струје можемо решити знајући одговарајуће решење за константну струју, али треба јачину струје, напон и Е заменити њиховим комплексним амплитудама а отпорности заменити комплексном отпорношћу.

Да би се нашла отпорност кола за наизменичну струју, мора се у шеми кола заменити свако L са $j\omega L$, свако C са $\frac{1}{j\omega C}$, док свако r остаје како јесте.

Над тим комплексним отпорностима врше се потом исте оне операције као и при израчунавању отпорности за константну струју (по формули за редну и паралелну везу)

Тако добијена комплексна величина Z и јесте укупна комплексна отпорност кола коју зовемо импеданција кола.

Одредимо комплексну величину Z

$$Z = X + jY$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

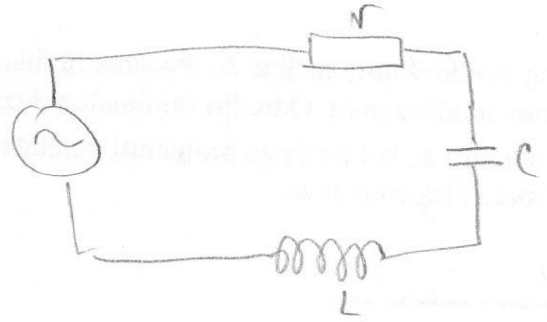
$$tg\,\varphi = \frac{X}{U}$$

$$U_0 = |\hat{U}_0|$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R}$$

На основу сабирања комплексних бројева имамо:

Осцилације исте учестаности се тако сабирају што им се саберу комплексне амплитуде тих осцилација. Модул добијеног комплексног израза даје стварну амплитуду резонантне осцилације а његов аргумент почетну фазу.



$$S = i_0 r + i_0 j\omega L - j\frac{i_0}{\omega C}$$

$$S = i_0 r + i_0 j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Стварна амплитуда збирног напона је $U_0 = |S|$

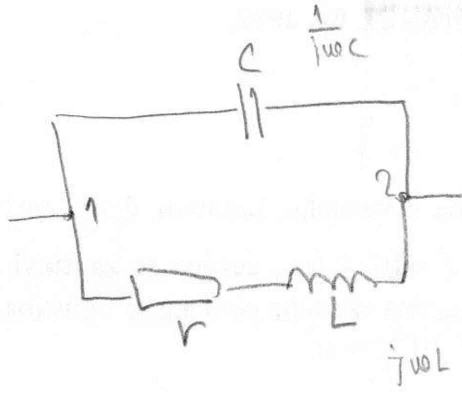
$$U_0 = i_0\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Почетна фаза је $\varphi = \arg(S)$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} S}{\operatorname{Re} S}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}\right)$$

Пример:



$$\tilde{Z}_1 = r + j\omega L$$

$$\tilde{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C}$$

Паралелна веза:

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}$$

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{r + j\omega L} + j\omega C$$

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1 + j\omega C(r + j\omega L)}{r + j\omega L}$$

$$\tilde{Z} = \frac{r + j\omega L}{1 + j\omega C(r + j\omega L)}$$

$$\tilde{Z} = \frac{r + j\omega L}{1 + j\omega C r - \omega C \omega L}$$

$$\tilde{Z} = \frac{r + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega C r} \cdot \frac{1 - \omega^2 LC - j\omega C r}{1 - \omega^2 LC - j\omega C r}$$

$+\omega L \omega C r$

$$\tilde{Z} = \frac{r - r\cancel{\omega^2 LC} - j\omega C r^2 + j\omega L - j\omega L \omega^2 LC}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 r^2}$$

$$\tilde{Z} = \frac{r + j\omega\left(L(1 - \omega^2 LC) - Cr^2\right)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 r^2}$$

$$Z = \frac{\sqrt{r^2 + \omega^2\left(L(1 - \omega^2 LC) - Cr^2\right)^2}}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 r^2}$$

Z_{min} :

$$L(1-\omega^2 LC) - Cr^2 = 0$$

$$L(1-\omega^2 LC) = Cr^2$$

$$1-\omega^2 LC = \frac{Cr^2}{L}$$

$$\omega^2 LC = 1 - \frac{Cr^2}{L}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{Cr^2}{L}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{Cr^2}{L}}$$

$$Z_{re} = \frac{r}{\left(1-\left(\frac{1}{LC}-\frac{Cr^2}{L}\right)LC\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}-\frac{Cr^2}{L}\right)C^2r^2}$$

$$Z_{re} = \frac{r}{(1-1+C^2r^2)^2 + \frac{C}{L}r^2 - \frac{C^3r^4}{L}}$$

$$Z_{re} = \frac{r}{C^4r^4 + \frac{C}{L}r^2 - \frac{C^3r^4}{L}}$$

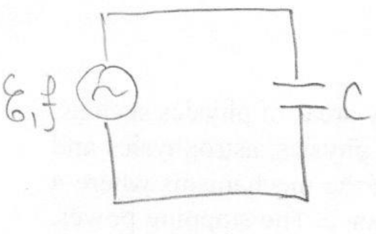
У колу приказаном на слици електромоторна сила генератора износи 100V, фреквенција његове емс износи 50Hz, а капацитивност кондензатора износи 20 μF. Одредити

а) Реактансу и комплексну импедансу кондензатора

б) Комплексно изразити јачину струје која протиче кроз кондензатор

в) Ефективну јачину струје која протиче кроз кондензатор

г) Фазни став струје кондензатора у односу на емс генератора



а) $X_C = \frac{1}{\omega C}$ $\qquad$ $Z_C = \frac{j}{\omega C}$

$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$ $\qquad$ $Z_C = 159\, j\, \Omega$

$X_C = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 Hz \, 20 \cdot 10^{-6} F}$ $\qquad$ $[Hz] = \left[\frac{1}{s}\right]$

$X_C = \frac{10^6}{6280}\,\Omega$ $\qquad$ $[F] = \frac{[s]}{[\Omega]}$

$X_C = 1{,}59 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6\,\Omega$

$X_C = 159\,\Omega$

д) $\tilde{I} = \frac{\mathcal{E}}{Z_c}$ $\qquad \mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}$

$$\tilde{I} = \frac{100\,V}{159\,j\,\Omega}$$

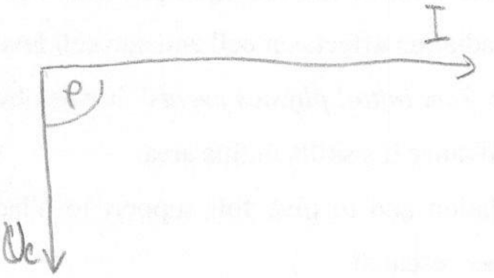
$$\tilde{I} = \frac{0{,}628}{j} \cdot \frac{j}{j}\,A$$

$$\tilde{I} = -0{,}628\,j\,A$$

б) $I_{ef} = \rho(\tilde{I})$

$$I = \sqrt{(-0{,}628)^2}$$

$$I = 0{,}628\,A$$



Напон на кондензатору касни за струјом за $\frac{\pi}{2}$,ω).

Струја кроз кондензатор фазно предњачи за

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

У колу приказаном на слици електромоторна сила генератора износи 100 V, фреквенција његове емс износи 50 Hz, а индуктивност калема износи 20 mH

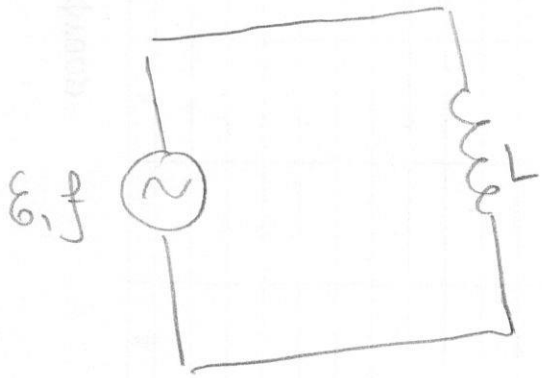
Одредити

а) Реактансу и комплексну импедансу калема

б) Комплексно изразити јачину струје која протиче кроз калем.

в) Ефективну јачину струје која протиче кроз калем

г) Фазни став струје калема у односу на емс генератора



a) $X_L = \omega L$

$X_L = 2\pi f L$

$X_L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 Hz \cdot 20 \cdot 10^{-3} H$

$X_L = 6280 \cdot 10^{-3} \Omega$

$X_L = 6{,}28 \Omega$

$[Hz] = \left[\frac{1}{s}\right]$

$[H] = [\Omega] \cdot [s]$

$Z_L = j\omega L$

$Z_L = 6{,}28 j \Omega$

б) $\hat{I} = \frac{\mathcal{E}}{Z_L}$; $\mathcal{E} = \hat{\mathcal{E}}$

$\hat{I} = \frac{100 V}{6{,}28 j \Omega}$

$\hat{I} = \frac{15{,}9}{j} \frac{j}{j} A$

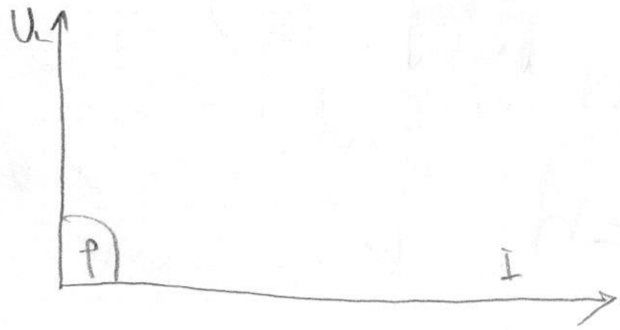
$\hat{I} = -15{,}9 j A$

в) $I = \rho(\hat{I})$

$I = \sqrt{0^2 + (-15{,}9)^2}$

$I = 15{,}9 A$

г) Напон на калему предњачи за $\frac{\pi}{2}$ у односу на струју



Струја калема фазно касни за $\frac{\pi}{2}$ у односу на напон на калему

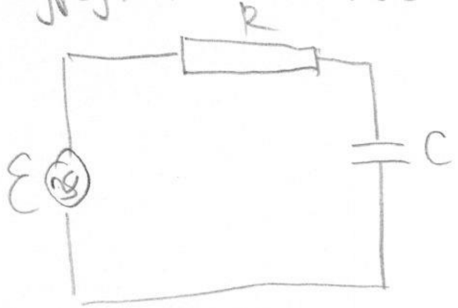
$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

У колу приказаном на слици електромоторна сила износи 50 V, фреквенција је $f = \frac{500}{\pi}$ Hz, отпорност отпорника износи $R = 30\,\Omega$, а капацитивност $C = 25\,\mu F$

а) комплексно представити струју која протиче кроз коло

б) нацртати фазни дијаграм.

г) одредити ефективне вредности напона на отпорнику и кондензатору



$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$$

$$Z = Z_R + Z_C$$

$$Z_R = R$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

$$Z = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$Z = R - j\frac{1}{2\pi f \cdot C}$$

$$Z = 30\,\Omega - j\frac{1}{1000\,Hz \cdot 25 \cdot 10^{-6}\,F}$$

$$1\,F = \frac{1\,s}{1\,\Omega}$$

$$Z = 30\,\Omega - j \cdot 40\,\Omega$$

$$Z = (30 - j40)\,\Omega$$

$$\tilde{I} = \frac{\varepsilon}{Z} = \frac{50\,V}{(30 - j40)\,\Omega}$$

$$\tilde{I} = \frac{50}{30 - j40}\,A \cdot \frac{30 + j40}{30 + j40}$$

$$\tilde{I} = \frac{50 \cdot (30 + j40)}{30^2 + 40^2}\,A$$

$$\tilde{I} = \frac{1500 + j2000}{900 + 1600}\,A$$

$$\hat{I} = \frac{1500 + j2000}{2500} \text{ A}$$

$$\hat{I} = \frac{15 + j20}{25} \text{ A}$$

$$\hat{I} = \frac{3 + j4}{5}$$

$$\hat{I} = \left(\frac{3}{5} + j\frac{4}{5}\right) \text{A}$$

$$\hat{I} = 0{,}6 + 0{,}8j \text{ A} \qquad I = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2} = 1 \text{ A}$$

$\hat{c}$) $\hat{U}_R = \hat{I} Z_R \qquad Z_R = R$

$$\hat{U}_R = (0{,}6 + 0{,}8j)\,\text{A} \cdot 30\,\Omega$$

$$\hat{U}_R = (18 + 24j)\text{ V}$$

$$U_R = \sqrt{18^2 + 24^2}$$

$$U_R = 30 \text{ V}$$

$$\hat{U}_C = \hat{I} Z_C$$

$$\hat{U}_C = \hat{I} \frac{1}{j\omega C}$$

$$\hat{U}_C = -(0{,}6 + 0{,}8j)\,\text{A} \frac{j}{2\pi \frac{500}{\pi}\,\text{Hz} \cdot 25 \cdot 10^{-6}\,\text{F}}$$

$$\tilde{U}_o = \frac{0,8 - 0,6j}{25} \cdot 10^3\ V$$

$$\tilde{U}_c = (32 - 24j)\ V$$

$$U_c = \sqrt{32^2 + 24^2}$$

$$U_c = 40\ V$$

U_c можемо наћи и преко I $(I = 1A)$

$$\tilde{U}_c = I \cdot Z$$

$$\tilde{U}_c = -1A \cdot \frac{j}{2\pi \frac{500}{\pi} Hz \cdot 25 \cdot 10^{-6} F}$$

$$\tilde{U}_c = \frac{-j}{25 \cdot 10^{-3}}\ V$$

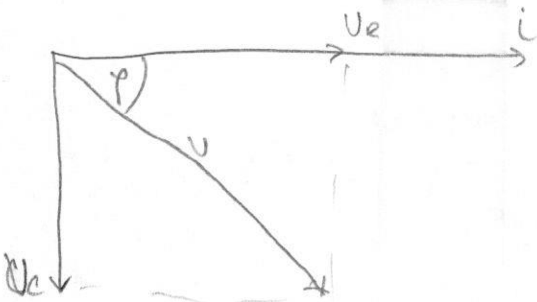
$$\tilde{U}_o = -0,04j\, 10^3\ V$$

$$\tilde{U}_c = -40j\ V$$

$$U_c = \sqrt{0^2 + 40^2}$$

$$U_c = 40\ V$$

8)



$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{U_R}{U_C} = \operatorname{arctg} \frac{30\,V}{40\,V} = 0{,}64 \text{ Rad}$$

1 За коло приказано на слици

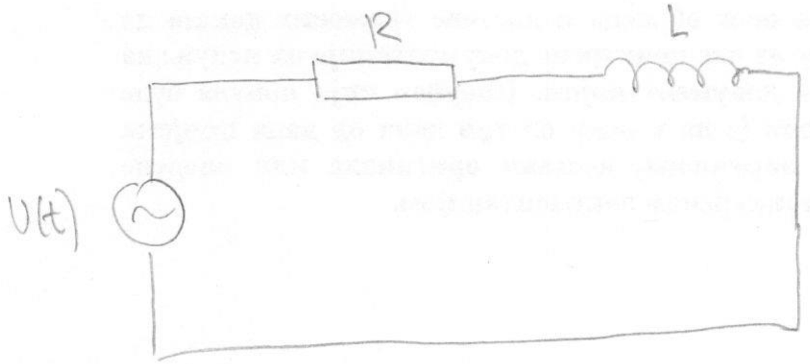
а) Нацртати фазорски дијаграм

б) Израчунати импедансу кола ако је $R = 3\Omega$, $X_L = 4\Omega$

в) Одредити аналитичке изразе за напоне на отпорнику и калему

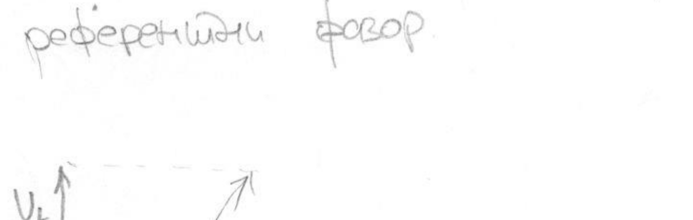
г) Наћи активну снагу и фактор снаге.

дат је напон $u(t) = 141{,}4 \sin(314t)$ [V]



Како иста струја тече кроз отпорник и калем, згодно је фазор струје поставити по фазној оси, односно узети га као референтни фазор

а)



б) Са слике видимо да је

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2$$

$$U_R = Ri$$

$$U_L = X_L i$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$$

$$U = \sqrt{R^2 i^2 + X_L^2 i^2}$$

$$U = i\sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$U = iZ$$

$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ - импеданса кола

$$Z = \sqrt{3^2 + 4^2}\ \Omega$$

$$Z = 5\ \Omega$$

в) Ефективна вредност улазног напона U је

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{141,4}{\sqrt{2}} = 100\ V$$

$$I_{eff} = \frac{U}{Z} = \frac{100\ V}{5\ \Omega} = 20\ A \quad \Rightarrow \quad i_0 = I_{eff} \cdot \sqrt{2} = 20\sqrt{2}\ A$$

$$tg\,\varphi = \frac{U_L}{U_R} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{U_L}{U_R} = arctg\frac{X_L\, i}{R\, i} = arctg\frac{X_L}{R} = 0,93\ rad$$

Сада можемо писати:

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i(t) = 20\sqrt{2}\ \sin(314t - 0,93)$$

Напон предњачи у односу на струју за φ, tj.

струја касни у односу на напон за φ

- Ефективна вредност напона на отпорнику је

$$U_{eff}^{R} = R \cdot I_{eff} = 3\ \Omega \cdot 20\ A = 60\ V$$

Аналитички израз напона на отпорнику који је у фази са струјом је

$$U_R(t) = 60\sqrt{2}\ (314t - 0,93)\ [V]$$

- Ефективна вредност напона на калему

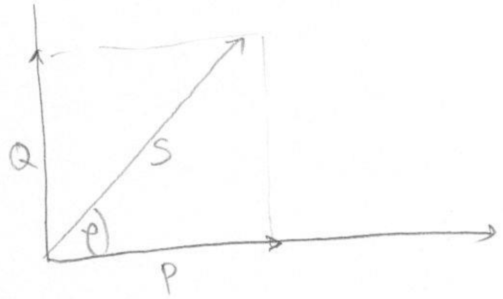
$$U_{eff}^{L} = X_L \cdot I_{eff} = 4\ \Omega \cdot 20 A = 80\ A$$

Аналитички израз напона на калему, који предњачи у односу на струју за $\frac{\pi}{2}$ је:

$$u_L(t) = 80\sqrt{2}\ \sin(314t - 0,93 + \frac{\pi}{2})$$

$$U_L(t) = 80\sqrt{2}\sin(314t + 0{,}64)\ [V]$$

2) Активна снага кола



$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$

$$P = S\cos\varphi$$

$$P = \underset{100}{\underset{\parallel}{U_{eff}}} \cdot \underset{20}{\underset{\parallel}{I_{eff}}} \cdot \underset{0{,}6}{\underset{\parallel}{\cos\varphi}}$$

$$P = 100 \cdot 20 \cdot 0{,}6\ W$$

$$P = 1200\ W$$

или:

$$P = U_R \cdot I = 60V \cdot 20A = 1200W$$

$$P = RI \cdot I$$

$$P = RI^2$$

$$P = 3\,\Omega \cdot (20\ A)^2$$

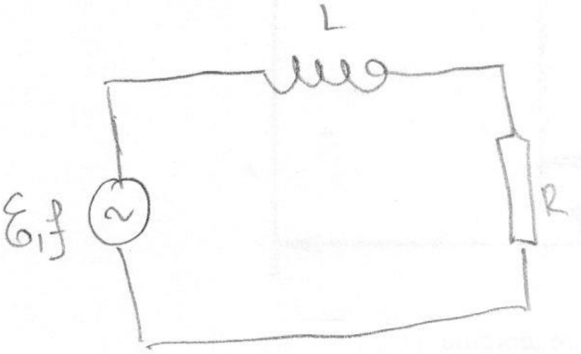
$$P = 1200\ W$$

У колу приказаном на слици електромоторна сила извора износи 50 V, а фреквенција $\frac{500}{\pi}$ Hz, отпорност отпорника износи 30Ω, а индуктивност калема износи 40 mH.

а) Комплексно представити струју која протиче кроз коло

б) Одредити ефективне вредности напона на калему и отпорнику

в) Нацртати фазорски дијаграм напона у колу



$Z = Z_R + Z_L$ — редна веза

$Z_R = R$

$Z_L = j\omega L$

$Z = (30 + j40)\,[\Omega]$

$Z_R = 30\Omega$

$\hat{I}_{eff} = \hat{I} = \frac{\mathcal{E}}{Z}$

$Z_L = j2\pi f L$

$Z_L = j \cdot 2\cancel{\pi} \frac{500}{\cancel{\pi}} Hz \cdot 40 \cdot 10^{-3} H$

$\hat{I} = \frac{50\ V}{(30 + j40)\,\Omega}$

$Z_L = 40j\ \Omega$

$$\tilde{I} = \frac{50\,V}{(30+j40)\,\Omega} \quad \frac{30-j40}{30-j40}$$

$$\tilde{I} = \frac{50\,(30-j40)}{30^2+40^2}$$

$$\tilde{I} = \frac{5\cancel{0}\,(3\cancel{0}-j4\cancel{0})}{90\cancel{0}+160\cancel{0}}$$

$$\tilde{I} = \frac{15-20j}{25}$$

$$\tilde{I} = \frac{3-4j}{5}$$

$$\tilde{I} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}j$$

$$\tilde{I} = (0{,}6 - j0{,}8)\ [A]$$

$$I_{ef} = I = \sqrt{0{,}6^2+0{,}8^2} = 1\,A$$

$$\hat{U}_R = I\, Z_R$$

$$\hat{U}_R = 1A \cdot 30\Omega$$

$$\hat{U}_R = 30\,V$$

$$U_R = \sqrt{0^2 + 30^2}$$

$$\underline{U_R = 30\,V}$$

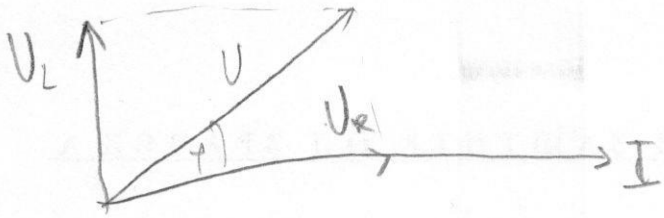
$$\hat{U}_L = I\, Z_L$$

$$\hat{U}_L = 1A \cdot 40j\,\Omega$$

$$U_L = \sqrt{0^2 + 40^2}$$

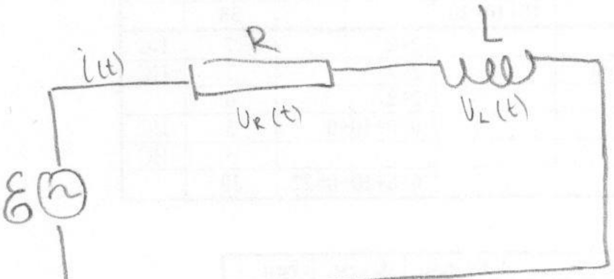
$$\underline{U_L = 40\,V}$$

b)



$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{U_L}{U_R} = \operatorname{arctg}\frac{40\,V}{30\,V} = 0{,}92\ \mathrm{rad}$$

3 Редна веза отпорника отпорности $R = 10\Omega$ и калема индуктивности $L = 1mH$ прикључена је на идеални генератор наизменичне електромоторне силе $\mathcal{E}(t) = 100\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})[V]$, где је $\omega = 10^4 \frac{rad}{s}$. Колика је вредност електромоторне силе у оним тренуцима времена у којима је енергија магнетског поља калема максимална.



Тренутна енергија магнетског поља калема је

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2$$

Енергија магнетног поља је максимална у оним тренуцима времена када струја има максималну или минималну вредност, I_m.

$$W_m = \frac{1}{2} L I_m^2$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$$

$$U = \sqrt{(IR) + (I\omega L)^2}$$

$$U = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\frac{U}{I} = Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$Z = \sqrt{100 + 100}$$

$$Z = 10\sqrt{2}\ \Omega$$

Максимална вредност струје

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} = \frac{100\ V}{10\sqrt{2}\ \Omega} = 5\sqrt{2}\,[A]$$

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 5\ A$$

Са фазорског дијаграма:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{U_L}{U_R} = \operatorname{arctg}\frac{X_L}{R} = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Улазни напон предњачи струји за φ, тј.

Струја касни за φ

$$i(t) = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \varphi\right) = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$i(t) = I_0 \cos \omega t \ [A]$$

Из претходног израза може се закључити да је струја максимална или минимална у тренутку када је

$$\cos \omega t = \pm 1$$

$$\omega t = 0 \ \text{и} \ \omega t = \pi$$

Тада је $\mathcal{E}$ једнако

$$\mathcal{E}_1 = 100 \cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = 100 \cos\frac{\pi}{4} = 100\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}\ [V]$$

$$\mathcal{E}_2 = 100 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 100 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 100\,\frac{-\sqrt{2}}{2} = -50\sqrt{2}\ [V]$$

У тренуцима када је енергија магнетног поља максимална $\mathcal{E}$ је једнака $\pm 50\sqrt{2}$ V.

4 За коло приказано на слици

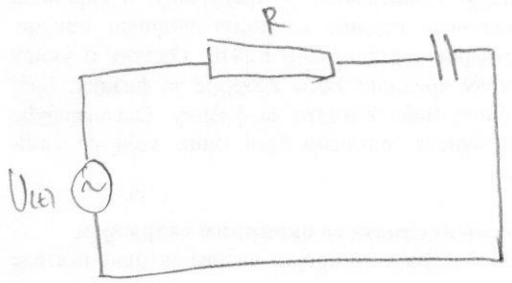
а) нацртати фазорски дијаграм

б) израчунати импедансу кола ако је $R = 6\Omega$, $C = 125\ \mu F$.

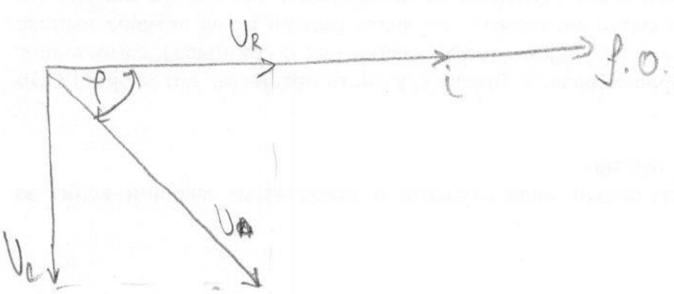
в) одредити аналитичке изразе за напоне на отпорнику и кондензатору

г) наћи активну снагу и фактор снаге

Дат је напон $u(t) = 60 \sin(1000t)$



а) Како се ради о редној вези иста струја тече кроз оба елемента



б) $U^2 = U_C^2 + U_R^2$

$U_{eff}^R = R I_{eff} = U_R$

$U_{eff}^C = X_C I_{eff} = U_C$

$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{(RI)^2 + (X_C I)^2} = I\sqrt{R^2 + X_C^2} = ZI$

$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot 125 \cdot 10^{-6}} = 8\,\Omega$ – капацитивна реактанса

Импеданса кола је

$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\,\Omega$

в) Са фазорског дијаграма следи

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-X_C}{R} = -\operatorname{arctg}\frac{X_C}{R} = -0{,}93\,\text{rad}$

Амплитудна вредност струје у колу је

$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{60}{10} = 6\,A$

Напон касни за струјом за φ, тј. струја предњачи напону за φ

$i(t) = 6 \cdot \sin(100t + 0{,}93)\ [A]$

Амплитудна вредност напона на отпорнику је:

$U_{0R} = R I_0 = 6\Omega \cdot 6A = 36V$

Аналитички израз напона на отпорнику (у фази са струјом)

$U_R(t) = 36 \sin(1000t + 0{,}93)\ [V]$

Амплитудна вредност напона на кондензатору је:

$U_{0C} = X_C I_{0C}$

$U_{0C} = 8\Omega \cdot 6A = 48V$

Аналитички израз напона на кондензатору који касни $\frac{\pi}{2}$ у односу на струју је:

$U_C(t) = 48 \sin\left(1000t + 0{,}93 - \frac{\pi}{2}\right) =$

г) Фактор снаге

$\varphi = -0{,}93\,rad$

$\cos\varphi = 0{,}6$

Активна снага

$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$

$P = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cdot \cos\varphi$

$P = \frac{60}{\sqrt{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot 0{,}6$

$P = 108\,W$

или

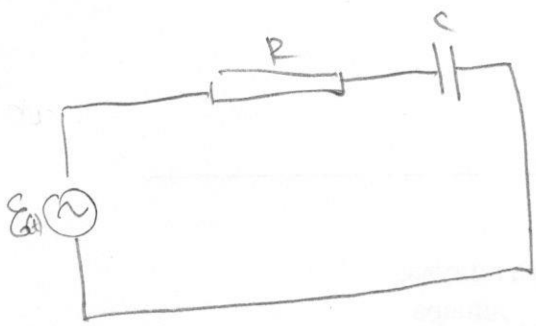
$P = U_R I$

$P = R I^2$

$P = 6 \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2$

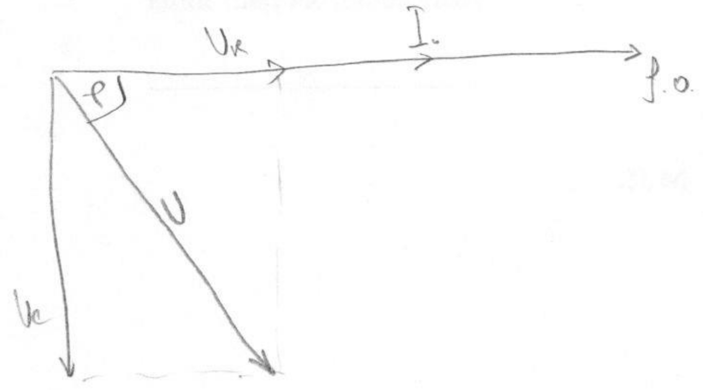
$P = 108\,W$

5. Редна веза отпорности $R = 1\,k\Omega$ и кондензатора капацитивности $C = 1\,nF$ прикључена је на генератор наизменичне електромоторне силе ефективне вредности $E = 1V$ и угаоне учестаности $\omega = 10^6 \frac{rad}{s}$. Колика је тренутна $\mathcal{E}$ у оним тренуцима времена када је јачина струје отпорника једнака нули?



Капацитивна реактанса је

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^6 \cdot 10^{-9}} = 1000\,\Omega$$



Нека је аналитички облик струје кроз коло

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

Са фазорског дијаграма

$$\varphi = -\mathrm{arctg} \frac{U_C}{U_R} = -\mathrm{arctg} \frac{X_C I}{R I} = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Емс касни за $\frac{\pi}{4}$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\mathcal{E} = E\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Струја кроз отпорник ће бити једнака нули када је

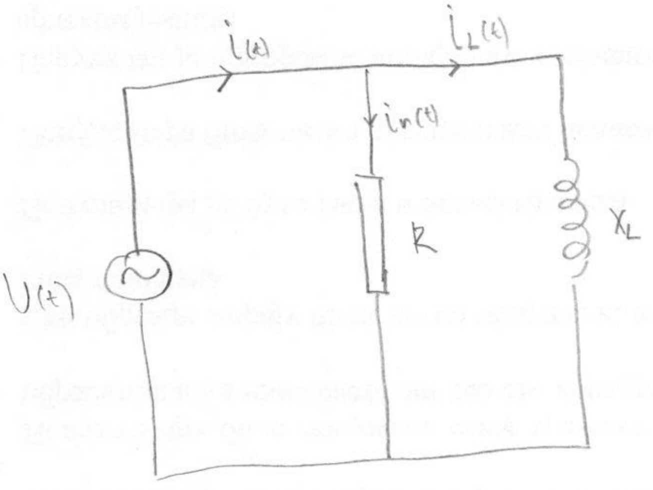
$$\sin \omega t = 0$$

$$\omega t = 0 \quad \vee \quad \omega t = \pi$$

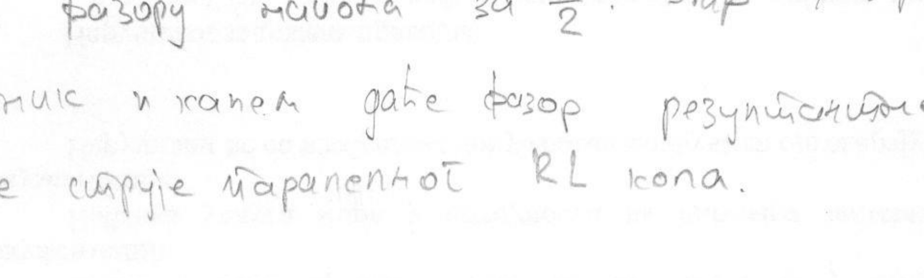
$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1\,\text{V} \quad \checkmark$$

$$\mathcal{E}_2 = \sqrt{2} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 1\,\text{V} \quad \checkmark$$

7. Паралелно RL коло са слике је прикључено на извор наизменичног напона $u(t) = 20\sqrt{2}\,\sin(314t)$ [V]. Ако је отпорност $R = 10\,\Omega$ и индуктивна реактанса једнака $X_L = 25\,\Omega$ одредити струје $i_L(t)$, $i_R(t)$ и $i(t)$



Како је напон исти на отпорнику и на калему постављамо фазор напона по фазној оси. Фазор струје кроз отпорник је у фази са фазором напона. Фазор струје кроз калем касни фазору напона за $\frac{\pi}{2}$. Збир фазора струје кроз отпорник и калем даје фазор резултантне струје, тј. улазне струје паралелног RL кола.



Са фазорског дијаграма важи:

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{X_L}\right)^2} = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{10^2} + \frac{1}{25^2}}} = \frac{1}{0{,}1076} = 9{,}29\ \Omega$$

Ефективна вредност струје у колу је

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = 2{,}15\ A$$

$$tg\ \varphi = \frac{I_L}{I_R}$$

$$\varphi = arctg \frac{I_L}{I_R} = arctg \frac{\frac{U}{X_L}}{\frac{U}{R}} = 0{,}38\ rad$$

Ефективне вредности струја кроз отпорник и калем

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{20}{10} = 2A$$

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{20}{25} = 0{,}8A$$

Аналитички изрази струје кроз отпорник и калем су:

$$i_R(t) = 2\sqrt{2}\ \sin 314t\ \ [A]$$

$$i_L(t) = 0{,}8\sqrt{2}\ \sin\left(314t - \frac{\pi}{2}\right)\ \ [A]$$

Фазор улазне струје касни фазору напона за 0,38 rad:

$$i(t) = 2{,}15\sqrt{2}\,\sin(314t - 0{,}38)\ [A]$$

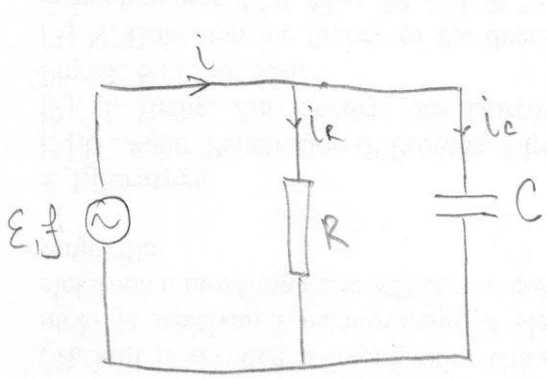
Задатак

У колу приказаном на слици електромоторна сила извора износи 50 V, фреквенца $\frac{500}{\pi}$ Hz, отпорност отпорника 25 Ω, а капацитивност кондензатора 100 μF.

а) Комплексно представити струју која протиче кроз извор

б) Одредити ефективне вредности струја кроз извор, кондензатор и отпорник

в) Нацртати фазорски дијаграм струја у колу



$$Z_R = R$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{Z_C + Z_R}{Z_R Z_C}$$

$$Z = \frac{Z_R Z_C}{Z_R + Z_C}$$

$$Z = \frac{-R\frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} \cdot \frac{R + \frac{j}{\omega C}}{R + \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z = \frac{+\frac{R}{\omega^2 C^2} - j\frac{R^2}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$Z = \frac{\frac{R - jR^2\omega C}{\cancel{\omega^2 C^2}}}{\frac{R^2\omega^2 C^2 + 1}{\cancel{\omega^2 C^2}}}$$

$$Z = \frac{R - jR^2\omega C}{1 + R^2\omega^2 C^2}$$

$$Z_R = 25\,\Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

$$Z_C = -\frac{j}{2\pi f C}$$

$$Z_C = -\frac{j}{2\cancel{\pi}\,\frac{500}{\cancel{\pi}}\,Hz \cdot 100 \cdot 10^{-6}\,F}$$

$$Z_C = -\frac{j}{100 \cdot 10^{-3}}\,\Omega$$

$$Z_C = -j10\,\Omega$$

$$Z = \frac{Z_R\, Z_C}{Z_R + Z_C}$$

$$Z = \frac{25 \cdot (-j10)}{25 - j10}\,\Omega \cdot \frac{25 + j10}{25 + j10}$$

$$Z = \frac{-j250\,(25 + j10)}{25^2 + 10^2}\,\Omega$$

$$Z = \frac{10 \cdot 250 - 25\,250\,j}{25^2 + 10^2}$$

$$Z = \frac{\cancel{5}\,10\,(250 - 625\,j)}{625 + 100}$$

$$z = \frac{2\cancel{\cdot}(250 - 625j)}{125 + 20}$$

$$z = \frac{2 \cdot 5(50 - 125j)}{125 + 20}$$

$$z = \frac{2(50 - 125j)}{25 + 4}$$

$$z = \frac{100 - 250j}{29}$$

$$z = (3{,}448 - 8{,}62j)\ [\Omega]$$

$$\tilde{I} = \frac{\mathcal{E}}{z}$$

$$\tilde{I} = \frac{50\,V}{3{,}448 - 8{,}62j} \cdot \frac{3{,}448 + 8{,}62j}{3{,}448 + 8{,}62j}$$

$$\tilde{I} = \frac{172{,}4 + j\,431}{11{,}88 + 74{,}3}$$

$$\tilde{I} = \frac{172{,}4 + j\,431}{86{,}18}$$

$$\tilde{I} = (2 + j5)\ [A]$$

δ) $I = \sqrt{2^2 + 5^2}$

$I = \sqrt{4 + 25}$

$I = \sqrt{29}$

$I = 5{,}385\ A$

$I_R = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$

$I_R = \dfrac{50\ V}{25\ \Omega}$

$I_R = 2\ A$

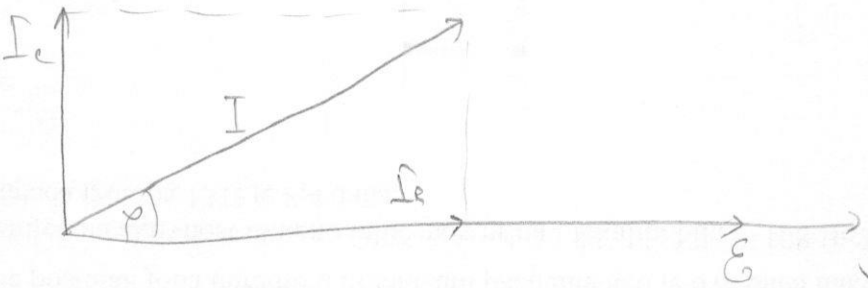
$I_C = \dfrac{\mathcal{E}}{X_C}$

$X_C = \dfrac{1}{\omega C} = 10\ \Omega$

$I_C = \dfrac{50\ V}{10\ \Omega}$

$I_C = 5\ A$

б)



Напон на кондензатору фазно касни у односу на струју за $\frac{\pi}{2}$, ш):

Струја ~~на~~ кроз кондензатор фазно предњачи за $\frac{\pi}{2}$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{I_R}{I_C} = \operatorname{arctg} \frac{2}{5} = 0{,}38 \text{ rad}$$

$\cancel{\mathcal{E} = \mathcal{E}_0}$ $\quad i = I_0 \sin \omega t$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 0{,}38)$$

Задатак

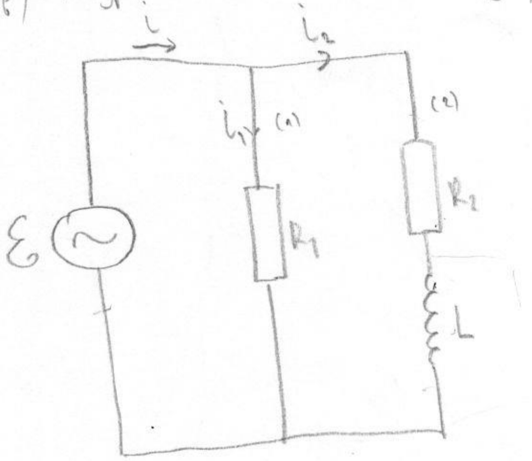
15 У колу приказаном на слици, електромоторна сила износи 50 V, а фреквенција $f = \frac{500}{\pi} Hz$

Отпорности R_1 и R_2 износе 50 Ω и 30 Ω, а индуктивност калема $L = 40\ mH$.

а) Израчунати струје у свим гранама кола

б) Израчунати напоне на потрошачима

в) Нацртати фазорски дијаграм напона у колу



а) $\hat{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2$

$\tilde{I}_1 = \frac{\varepsilon}{Z_1}$

$Z_1 = R$

$\tilde{I}_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{50\,V}{50\,\Omega}$

$\tilde{I}_1 = 1\,A$

$\tilde{I}_2 = \frac{\varepsilon}{Z_2}$

$Z_2 = R_2 + j\omega L$

$\tilde{I}_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + j\omega L}$

$\hat{I}_2 = \frac{50\,V}{30\,\Omega + j \cdot 2\pi \cdot \frac{500}{\pi} Hz \cdot 40 \cdot 10^{-3}\,H}$

$Hz = \frac{1}{s}$ $\quad H = \Omega s$

$\hat{I}_2 = \frac{50}{30 + j \cdot 40}\ A$

$$\tilde{I}_2 = \frac{50}{30+j\cdot 40} \cdot \frac{30-j40}{30-j40} \text{ A}$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{50(30-j40)}{30^2+40^2}$$

$$\tilde{I}_2 = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}j\right)\text{A}$$

$$\tilde{I}_2 = (0{,}6 - 0{,}8j)\text{A}$$

$$I_2 = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2}$$

$$I_2 = 1 \text{ A}$$

$$I = \sqrt{1{,}6^2 + 0{,}8^2}$$

$$I = 1{,}79 \text{ A}$$

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2$$

$$\tilde{I} = 1\text{A} + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}j\right)\text{A}$$

$$\tilde{I} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}j$$

$$\tilde{I} = (1{,}6 - 0{,}8j)\,[\text{A}]$$

б) $U_{R1} = 50\text{V}$

$$\tilde{U}_{R2} = Z_{R2} \cdot I_2$$

$$\tilde{U}_{R2} = R \cdot I_2$$

$$\tilde{U}_{R2} = 30\,\Omega \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}j\right)\text{A}$$

$$\tilde{U}_{R2} = (18 - 24j)\text{ V}$$

$$U_{R2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = \sqrt{324+576}$$

$$U_{R2} = \sqrt{900} = 30\text{V}$$

$$\tilde{U}_L = Z_L \cdot I_2$$

$$\tilde{U}_L = j\omega L \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}j\right)\text{A}$$

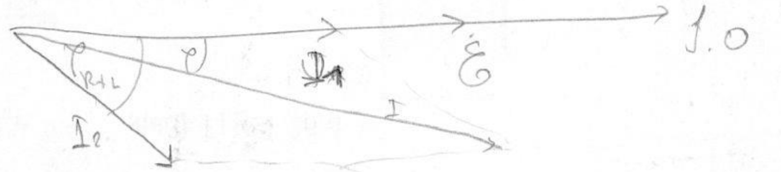
$$\tilde{U}_L = j \cdot 2\pi \frac{500}{\pi}\text{Hz} \cdot 40 \cdot 10^{-3}\text{H}\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}j\right)\text{A}$$

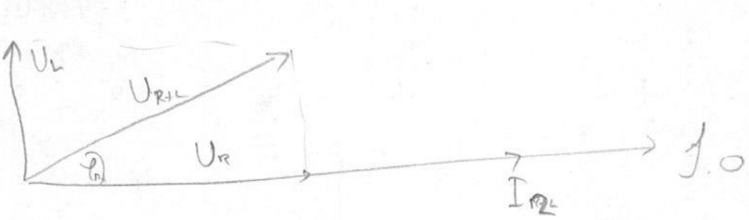
$$\tilde{U}_L = (24j + 32)\text{ A}$$

$$\tilde{U}_L = (32 + 24j)\text{ A}$$

$$U_L = \sqrt{32^2+24^2} = \sqrt{1600} = 40\text{V}$$

b)





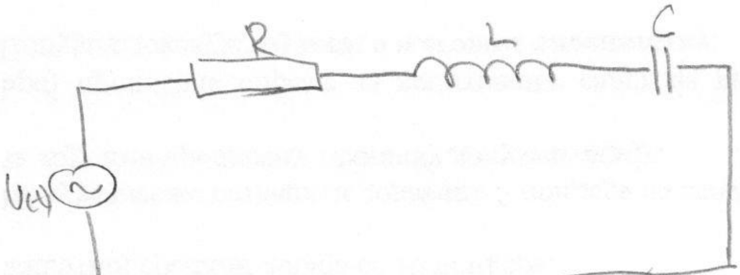
$$\varphi_{R+L} = \operatorname{arctg} \frac{U_L}{U_R}$$

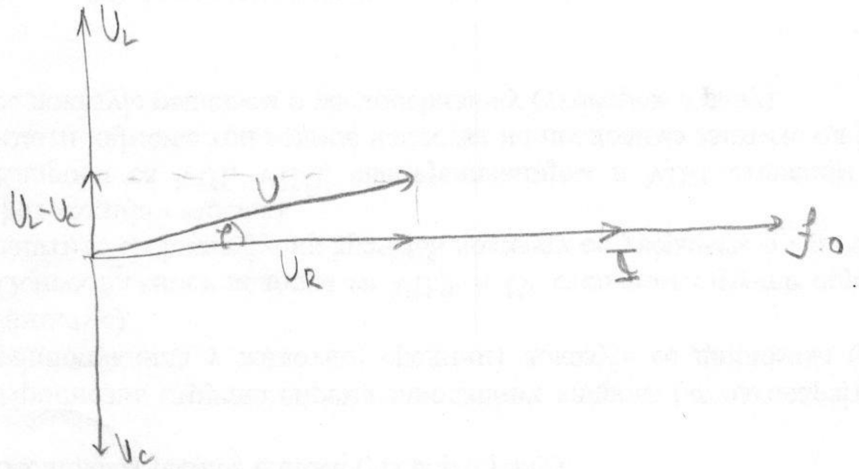
$\varphi =$?!

Задатак

6 На слици је дато редно RLC коло прикључено на извор наизменичног напона $U(t) = 50\sqrt{2}\sin(314t + \frac{\pi}{6})$ [V].

Наћи аналитичке изразе за струју у колу као и напоне на калему и кондензатору, ако је $R = 6\Omega$, $X_L = 9\Omega$ и $X_C = 17\Omega$





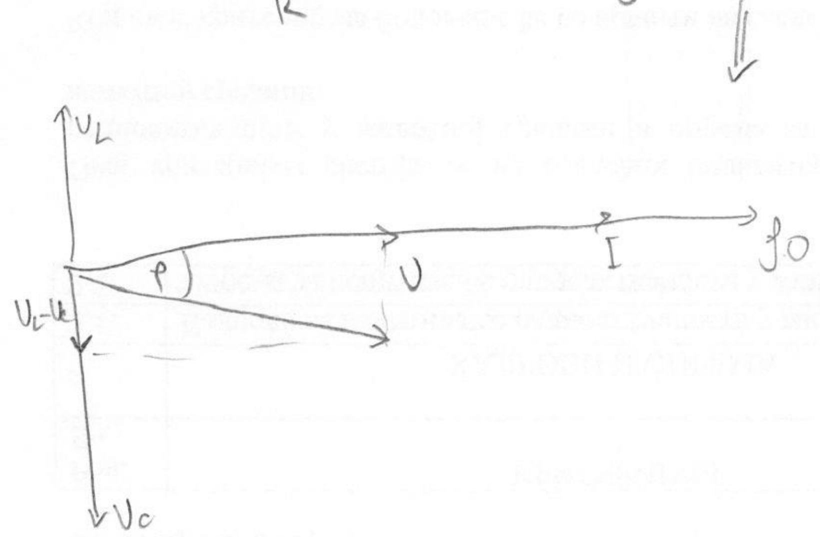
$$U^2 = U_R^2 + (U_C - U_L)^2$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_C - U_L)^2} = \sqrt{(RI)^2 + (X_C I - X_L I)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2} = ZI$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$$

$$Z = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\Omega$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = \operatorname{arctg} \frac{-8}{6} = -0{,}93 \text{ rad}$$



Ради се о претежно капацитивном колу јер је $\varphi < 0$

$$U_{eff} = Z I_{eff}$$

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{2} Z} = \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 10} A = 5 A$$

Струја предњачи за φ

$$i(t) = I_0 \sin(314t + \frac{\pi}{6} + \varphi) = 5\sqrt{2} \sin(314t + 1{,}45) \, [A]$$

Ефективне вредности напона на кондензатору и калему су

$$U^C_{eff} = U_C = X_C I_{eff} = 17 \cdot 5 = 85 V$$

$$U^L_{eff} = U_L = X_L I_{eff} = 9 \cdot 5 = 45 V$$

$$U_C(t) = 85\sqrt{2} \sin(314t + 1{,}45 - \frac{\pi}{2}) = 85\sqrt{2} \sin(314t - 0{,}12) \, [V]$$

$$U_L(t) = 45\sqrt{2} \sin(314t + 1{,}45 + \frac{\pi}{2}) = 45\sqrt{2} \sin(314t + 3{,}02) \, [V]$$

Фактор снаге

$\cos\varphi = 0{,}6$

Активна снага кола

$P = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi = 50 \cdot 5 \cdot 0{,}6 = 150\,W$

или

$P = R I_{eff}^2 = 6 \cdot 5^2 = 150\,W$

Задатак

У колу наизменичне струје са слике напон извора напајања се хармонијски мења по закону $V=V_0 \sin\omega t$.

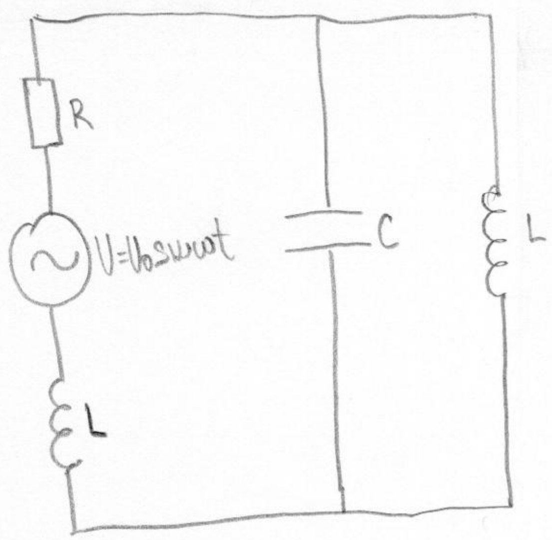
а) Одредити израз за комплексну импедансу кола и модуо комплексне импедансе.

б) Одредити вредност капацитета C у зависности од осталих параметора кола за које ће струја извора имати максималну вредност.

в) Ако је $X_L = 1\Omega$, $X_C = 2\Omega$, а извор напајања градска мрежа ($V_{eff}=220\ V$, $\nu=50\ Hz$), одредити вредност отпорности R, тако да фазни померај струје и напона буде $\frac{\pi}{4}$. Нацртати фазорски дијаграм за овај случај.

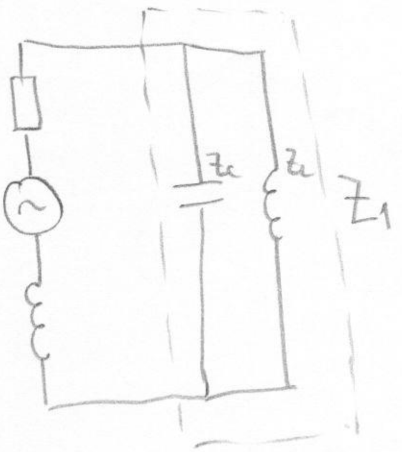
г) За податке под в) одредити укупну енергију магнетског поља у неком временском тренутку.

д) Одредити средњу привидну, активну и реактивну снагу кола.



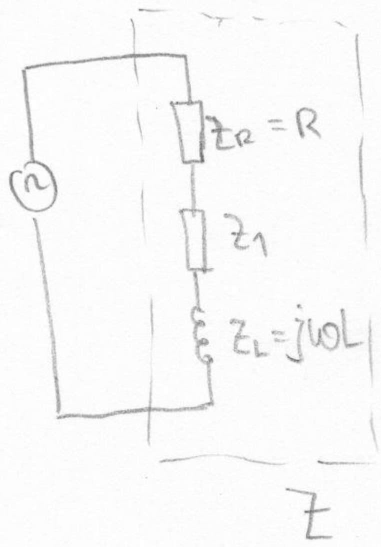
Решење:

a)



$$Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

$$Z_L = j\omega L$$



$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}$$

$$Z_1 = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L}$$

$$Z_1 = \frac{-\frac{j}{\omega C} \cdot j\omega L}{j\omega L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z_1 = \frac{-j\frac{L}{C}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}$$

$$Z_1 = \frac{-j\omega \cancel{C}\frac{L}{\cancel{C}}}{\omega^2 LC - 1}$$

$$Z_1 = -\frac{j\omega L}{\omega^2 LC - 1}$$

$$Z = R + j\omega L - \frac{j\omega L}{\omega^2 LC - 1}$$

$$\boxed{Z = R + j\left(\omega L - \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}\right)}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}\right)^2}$$

б) $I = \frac{U}{Z}$

$I \to max \Rightarrow Z \to min$

$\frac{dZ}{dC} = 0$, из израза за Z мора бити ($Z \to min$)

$$\omega L - \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} = 0$$

$$\frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} = \omega L$$

$$\omega^2 LC - 1 = 1$$

$$\omega^2 LC = 2$$

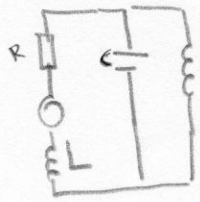
$$\boxed{C = \frac{2}{\omega^2 L}}$$

b) $X_L = 1\,\Omega$, $X_C = 2\,\Omega$

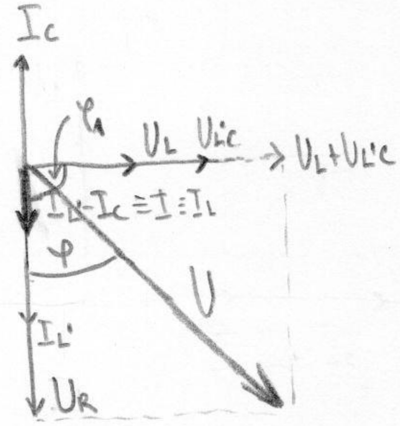
$X_{L'} < X_C$

$I_{L'} > I_C$

$U_{L'} = U_C = U_{L'C}$



$$tg\,\varphi = \frac{Im\,Z}{Re\,Z}$$



$$tg\,\frac{\pi}{4} = \left| \frac{\omega L - \dfrac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}}{R} \right|$$

$$R = \omega L - \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}$$

$$R = X_L - \frac{X_L}{\omega L \cdot \omega C - 1}$$

$$Z_1 = - \frac{j\,\omega L}{\omega^2 LC - 1}$$

$$R = X_L - \frac{X_L}{\dfrac{X_L}{X_C} - 1}$$

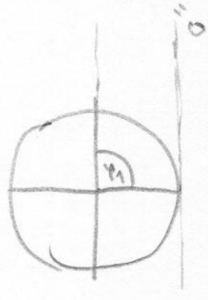
$$|Z_1| = \left| \frac{X_L}{\dfrac{X_L}{X_C} - 1} \right|$$

$$R = 1\,\Omega - \frac{1\,\Omega}{\dfrac{1\,\Omega}{2\,\Omega} - 1}$$

$$|Z_1| = \left| \frac{1\,\Omega}{\frac{1}{2} - 1} \right| = 2\,\Omega$$

$$R = \left(1 - \frac{1}{-\frac{1}{2}}\right)\Omega$$

$$tg\,\varphi_1 = \frac{Im\,Z_1}{\underset{0}{Re\,Z_1}} = \infty$$



$$R = (1 + 2)\,\Omega$$

$$\boxed{R = 3\,\Omega}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$\hat{c})$ $W_v(t) = W_1(t) + W'(t)$

$W_1(t) = \frac{1}{2} L i_1^2(t)$

$W'(t) = \frac{1}{2} L i'^2(t)$

$u(t) = U_0 \sin \omega t$

Са фазорског дијаграма:

$i(t) = I_L \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$

$i'(t) = I_{L'} \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$

$W_v(t) = \frac{1}{2} L (I_L + I_{L'})^2 \sin^2(\omega t - \frac{\pi}{4})$

$I = \frac{U}{Z} = \frac{220\,V}{3\,\Omega} \approx 73{,}3\ A$

$U_{L'C} = I \cdot Z_1 = 73{,}3A \cdot 2\Omega$

$U_{L'C} = 146{,}6\ V$

$I_{L'} = \frac{U_{L'C}}{X_L} = \frac{146{,}6\,V}{1\,\Omega} = 146{,}6\,A$

$W_v(t) = \frac{1}{2} \frac{\overset{X_L}{\omega L}}{\omega} (220\,A)^2 \sin^2(\omega t - \frac{\pi}{4})$

$W_v = \frac{1}{2} \frac{1\,\Omega \cdot 48400\,A^2}{314\,\frac{rad}{s}} \sin^2(\omega t - \frac{\pi}{4})$

$$W_{L}(t) = 77 \sin^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \; [J]$$

g) $S = I_{eff} \cdot V_{eff}$

$S = 220\,V \cdot 73{,}3\,A$

$S = 16{,}126 \; kVA$

$P = S \cos\varphi$

$P = 11{,}4 \; kW$

$Q = S \sin\varphi$

$Q = 11{,}K \; kVAr$

У електричном колу наизменичне струје фреквенције $\frac{250}{\pi}$ Hz приказаном на слици елементи имају следеће вредности

$\varepsilon = 100\ V$

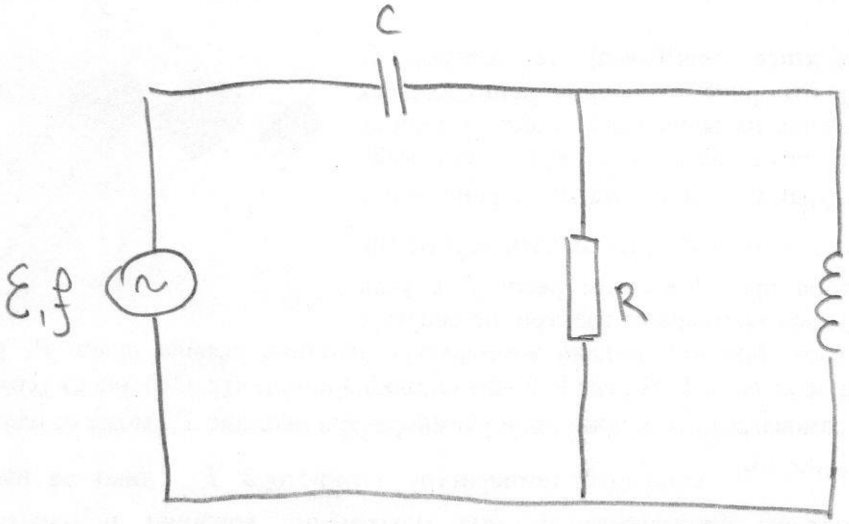
$R = 30\ \Omega$

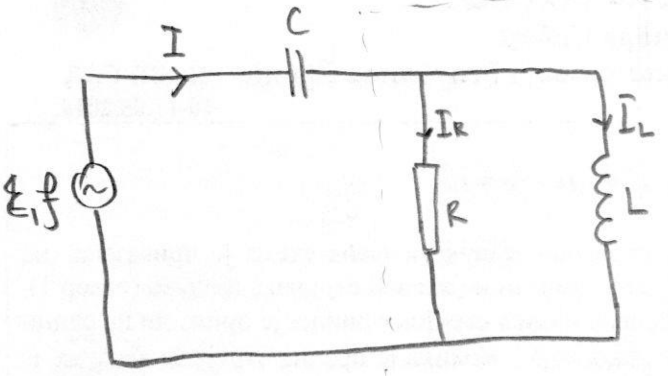
$L = 80\ mH$

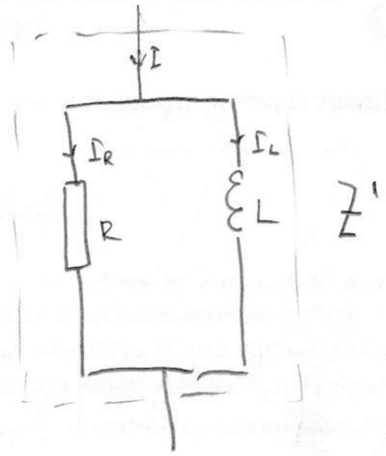
$C = 40\ \mu F$

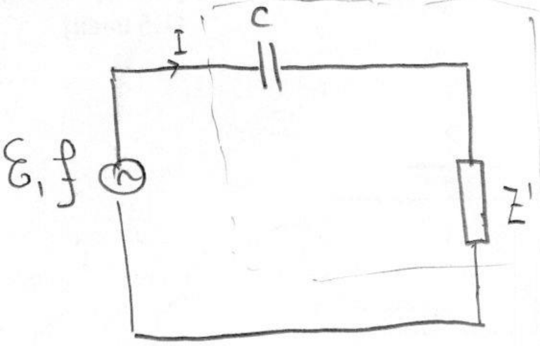
а) Наћи еквивалентну отпорност кола и фазни померај напона извора у односу на струју извора.

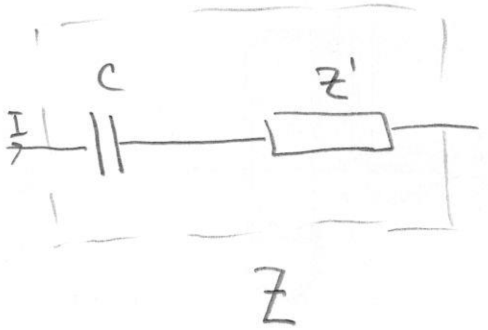
б) Одредити ефективне вредности јачине струја и напона на појединачним елементима кола.

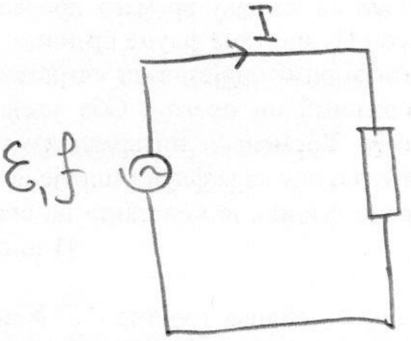












Z - еквивалентна отпорност кола

$Z_R = R$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$Z_L = j\omega L$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{250}{\pi} Hz = 500\ Hz$$

$Z_R = 30\,\Omega$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{500 Hz \cdot 40 \cdot 10^{-6} F} = -50j\,\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j \cdot 500\ Hz \cdot 80 \cdot 10^{-3} H = 40j\,\Omega$$

Z' – паралелна веза Z_R и Z_L

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L}$$

$$\frac{1}{Z'} = \frac{Z_L + Z_R}{Z_R Z_L}$$

$$Z' = \frac{Z_R Z_L}{Z_L + Z_R}$$

$$Z' = \frac{30\,\Omega \cdot 40\,\Omega\, j}{30\,\Omega + 40j\,\Omega}$$

$$Z' = \frac{1200j}{30+40j}\,\Omega$$

$$Z' = \frac{120j}{3+4j} \cdot \frac{3-4j}{3-4j}\,\Omega$$

$$Z' = \frac{360j \cancel{*} + 480}{9+16}\,\Omega$$

$$Z' = \frac{480 + 360j}{25}\,\Omega$$

$$Z' = (19{,}2 + 14{,}4\,j)\,\Omega$$

У општим бројевима:

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L}$$

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\frac{1}{Z'} = \frac{j\omega L + R}{R \cdot j\omega L}$$

$$Z' = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} \quad \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L}$$

$$Z' = \frac{R\omega L\, j\, (R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$Z' = \frac{R\omega L(\omega L + jR)}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\boxed{Z' = \frac{\omega L + Rj}{\frac{R}{\omega L} + \frac{\omega L}{R}}}$$

$$Z' = \frac{500\,\mathrm{Hz} \cdot 80\,\mathrm{mH} + 30\,\Omega\, j}{\frac{30\,\Omega}{500\,\mathrm{Hz} \cdot 80\,\mathrm{mH}} + \frac{500\,\mathrm{Hz} \cdot 80\,\mathrm{mH}}{30\,\Omega}}$$

$$Z' = \frac{40\,\Omega + j\,30\,\Omega}{\frac{30}{40} + \frac{40}{30}}$$

$$Z' = \frac{40\,\Omega + j\,30\,\Omega}{0{,}75 + 1{,}33}$$

$$Z' = \frac{40\,\Omega + j\,30\,\Omega}{2{,}083}$$

$$Z' = (19{,}2 + j\,14{,}4)\,\Omega$$

Z је редна веза Z_C и Z'

$$Z = Z_C + Z'$$

$$Z = -50j\,\Omega + (19{,}2 + 14{,}4j)\,\Omega$$

$$Z = (19{,}2 - 35{,}6j)\,\Omega \qquad |Z| = \sqrt{19{,}2^2 + 35{,}6^2} = \sqrt{368{,}64 + 1267{,}36} = 40{,}45\,\Omega$$

У општим бројевима:

$$Z = -\frac{j}{\omega C} + \frac{\omega L + Rj}{\frac{R}{\omega L} + \frac{\omega L}{R}}$$

$$Z = \frac{\omega^2 LC + \left(\omega C R - \frac{R}{\omega L} - \frac{\omega L}{R}\right)j}{\omega C\left(\frac{R}{\omega L} + \frac{\omega L}{R}\right)}$$

$\mathcal{E}$ - ефективна вредност напона извора $\equiv \mathcal{E}_{eff}$

$\tilde{I}_{eff} = \frac{\mathcal{E}_{eff}}{Z}$ - комплексна вредност ефективне струје кроз извор

$$\tilde{I}_{eff} = \frac{100\,V}{(19{,}2 - 35{,}6j)\,\Omega} \cdot \frac{19{,}2 + 35{,}6j}{19{,}2 + 35{,}6j}$$

$$\tilde{I}_{eff} = \frac{1920 + 3560j}{19{,}2^2 + 35{,}6^2}\ A$$

$$\tilde{I}_{eff} = \frac{1920 + 3560j}{368{,}64 + 1267{,}36}$$

$$\tilde{I}_{eff} = \frac{1920 + 3560j}{1036}$$

$$\tilde{I}_{eff} = (1{,}17 + 2{,}176j)\ A$$

Модуо комплексне величине даје вредност реалне величине коју комплексна представља

$$I_{eff} = |\tilde{I}_{eff}| = \sqrt{1{,}17^2 + 2{,}176^2}$$

$\underline{I_{eff} = 2{,}47\ A}$ // - ефективна вредност струје извора

Фазни помераj напона и струје извора можемо одредити из комплексне импедансе кола

$$\underline{Z} = (19{,}2 - 35{,}6\,j)\,\Omega \qquad \hat{U} = \hat{I} \cdot Z$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-35{,}6}{19{,}2}$$

$$\underline{\varphi = -1{,}076\ \mathrm{rad}}$$

Напон касни за φ

Струја предњачи за φ

Такође из комплексне струје

$$\hat{I}_{eff} = (1{,}17 + 2{,}176\,j)\,A$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2{,}176}{1{,}17}$$

$\varphi = 1{,}077 \Rightarrow$ Струја предњачи у односу на напон δ) $U_{ceff} = ?$ $I_{ceff} = ?$

$I_c \equiv I$

$I_{ceff} = I_{eff} = 2{,}47\ A$

$\hat{U}_{ceff} = Z_c \cdot I_{eff}$ $\Leftrightarrow$ $\hat{U}_{ceff} = Z_c \cdot \hat{I}_{eff}$

$\hat{U}_{ceff} = -50\dot{j}\,\Omega \cdot 2{,}47\ A$

$\hat{U}_{ceff} = -50\dot{j}\,\Omega \cdot (1{,}17 + 2{,}176\dot{j})\ A$

$\hat{U}_{ceff} = -123{,}5\dot{j}\ V$

$\hat{U}_{ceff} = (-58{,}5\dot{j} + 108{,}8)\ V$

$U_{ceff} = 123{,}5\ V$

$\hat{U}_{ceff} = (108{,}8 - 58{,}5\dot{j})\ V$

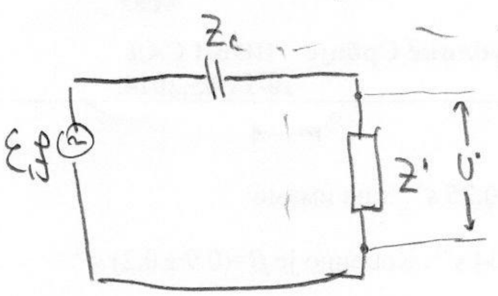
$U_{ceff} = \sqrt{108{,}8^2 + 58{,}5^2}\ V$

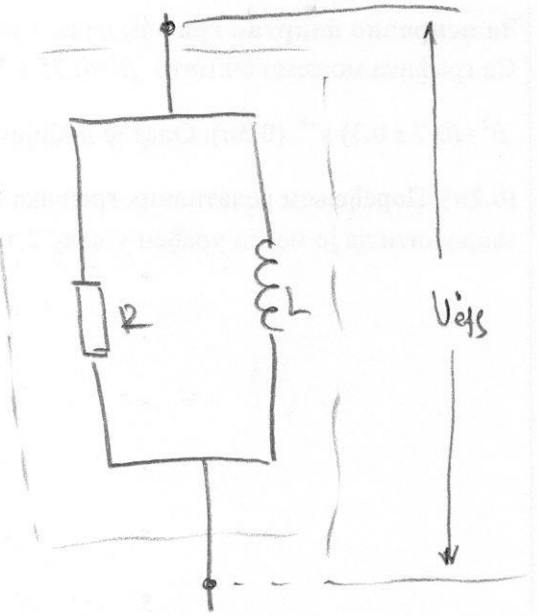
$U_{ceff} = \sqrt{11837{,}44 + 3422{,}5}\ V$

$U_{ceff} = \sqrt{15259{,}69}\ V$

$U_{ceff} = 123{,}5\ V$

Ефективне вредности напона на R и L





$$\tilde{U}'_{eff} = Z' \cdot I_{eff}$$

$$\tilde{U}'_{eff} = (19{,}2 + 14{,}4j)\,\Omega \cdot 2{,}47\,A$$

$$\tilde{U}'_{eff} = (47{,}424 + 35{,}568\,j)\,V$$

$$U'_{eff} = \sqrt{47{,}424^2 + 35{,}568^2}$$

$$U'_{eff} = 59{,}28\,V$$

$$U_{Reff} = U_{Leff} = U'_{eff}$$

$$U_{Reff} = 59{,}28\,V$$

$$U_{Leff} = 59{,}28\,V$$

Струје кроз R и L $\Rightarrow$ I_R и I_L

$$\tilde{I}_{Reff} = \frac{\tilde{U}_{Reff}}{Z_R}$$

$$\tilde{I}_{Reff} = \frac{59{,}28\ V}{30\ \Omega}$$

$$\tilde{I}_{Reff} = 1{,}976\ A$$

$$\boxed{I_{Reff} = 1{,}976\ A}$$

$$\tilde{I}_{Leff} = \frac{U_{Leff}}{Z_L}$$

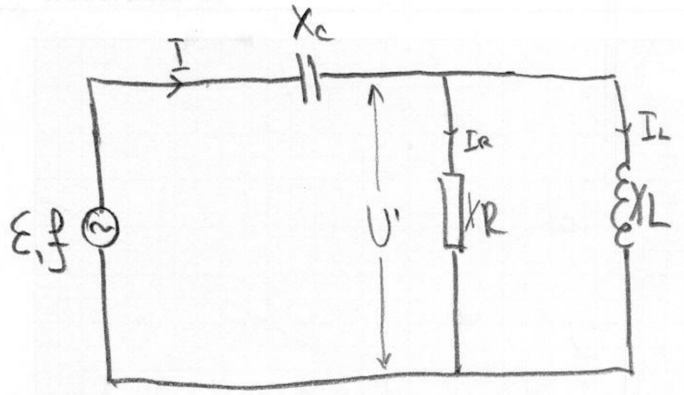
$$\tilde{I}_{Leff} = \frac{59{,}28\ V}{40j\ \Omega}$$

$$\tilde{I}_{Leff} = \frac{1{,}482}{j}\ A\ \frac{j}{j}$$

$$\tilde{I}_{Leff} = -1{,}482\,j\ A$$

$$\boxed{I_{Leff} = 1{,}482\ A}$$

II начин: Путем фазора



Напон на калему предњачи за $\frac{\pi}{2}$

Напон на кондензатору касни за $\frac{\pi}{2}$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$

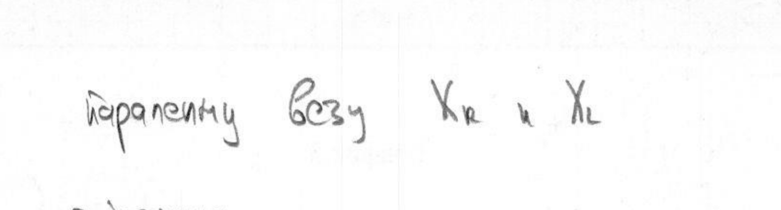
$X_C = \frac{1}{\omega C}$ i $X_C = 50\,\Omega$

$X_L = \omega L$ $X_L = 40\,\Omega$

$X_R = R$ $X_R = 30\,\Omega$

Посматрајмо паралелну везу X_R и X_L

Напон је заједнички



$$I = \sqrt{I_L^2 + I_R^2}$$

$$\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{I_L}{I_R}$$

$$\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{\frac{U_{RL}}{X_L}}{\frac{U_{RL}}{R}}$$

$$\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{R}{X_L}$$

$$\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{30\,\Omega}{40\,\Omega}$$

$$\varphi' = 0{,}64 \text{ rad}$$

$$I = \sqrt{\left(\frac{U_L}{X_L}\right)^2 + \left(\frac{U_R}{X_R}\right)^2} \quad ; U_L = U_R = U_{RL}$$

$$I = U_{RL} \sqrt{\frac{1}{X_L^2} + \frac{1}{X_R^2}}$$

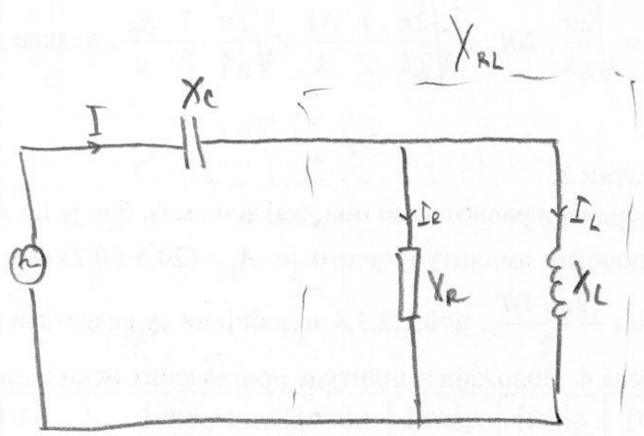
$$\frac{U_{RL}}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{X_L^2} + \frac{1}{X_R^2}}} \equiv X_{RL}$$

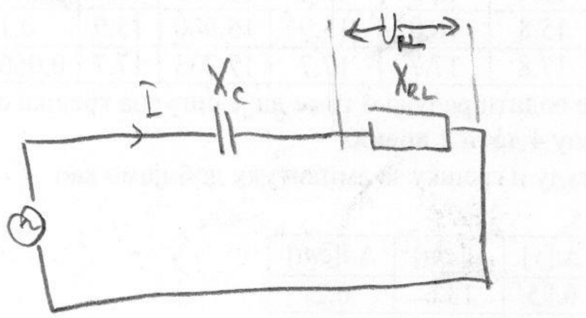
$$X_{RL} = \frac{1}{\sqrt{\frac{X_R^2 + X_L^2}{X_L^2 X_R^2}}}$$

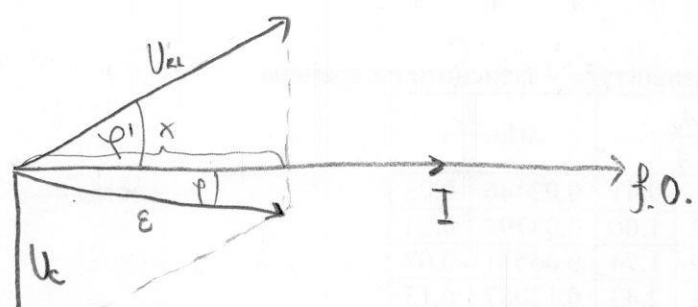
$$X_{RL} = \frac{X_L X_R}{\sqrt{X_R^2 + X_L^2}}$$

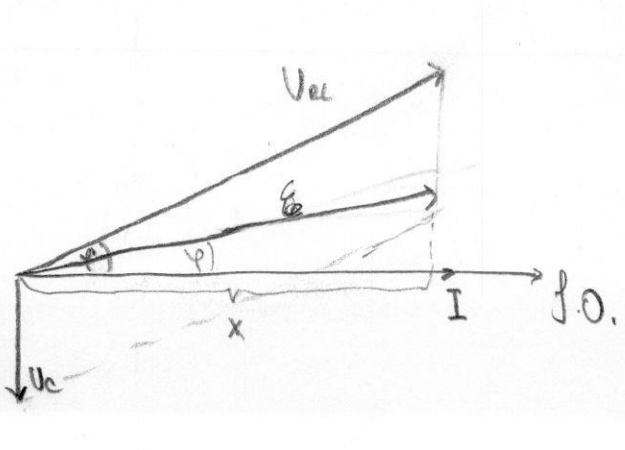
$$X_{RL} = \frac{40 \cdot 30}{\sqrt{40^2 + 30^2}}\,\Omega$$

$$X_{RL} = 24\,\Omega$$

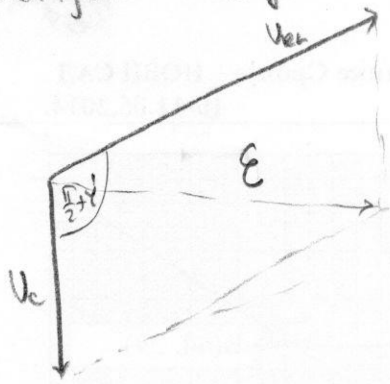








Kosinusna teorema



$$\mathcal{E}^2 = U_C^2 + U_{RL}^2 + 2U_C U_{RL}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi'\right)$$

$$\mathcal{E}^2 = U_C^2 + U_{RL}^2 - 2U_C U_{RL}\sin\varphi'$$

$$\mathcal{E}^2 = (I\cdot X_C)^2 + (I X_{RL})^2 - 2IX_C\cdot IX_{RL}\sin\varphi'$$

$$\mathcal{E}^2 = I^2\underbrace{\left(X_C^2 + X_{RL}^2 - 2X_C X_{RL}\sin\varphi'\right)}_{X_e^2}$$

$$\mathcal{E}^2 = I^2 X_e^2$$

$$X_e = \sqrt{X_C^2 + X_{RL}^2 - 2X_C X_{RL}\sin\varphi'}$$

$$X_e = \sqrt{2500 + 576 - 1433}$$

$$X_e = 40{,}5\ \Omega$$

$$\mathcal{E} = I X_e$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{X_e} = \frac{100\ V}{40{,}5\ \Omega} = 2{,}47\ A$$

$$I = \frac{100\ V}{40{,}5\ \Omega}$$

$$\underline{I = 2{,}47\ A}$$

Фазни померај струје и напона

Са фазорског дијаграма (оба)

$$\cos\varphi' = \frac{X}{U_{RL}}$$

$$X = U_{RL}\cos\varphi' \quad *$$

$$\cos\varphi = \frac{X}{\mathcal{E}}$$

$$X = \mathcal{E}\cos\varphi \quad **$$

$$(* \wedge **) \Rightarrow U_{RL}\cos\varphi' = \mathcal{E}\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{U_{RL}}{\mathcal{E}}\cos\varphi'$$

$$\cos\varphi = \frac{X_{RL}\cdot I}{\mathcal{E}}\cos\varphi'$$

$$\cos\varphi = \frac{24\ \Omega \cdot 2{,}47\ A}{100\ V}\cos 0{,}64\ rad$$

$$\cos\varphi = 0{,}475$$

$$\varphi = 1{,}075\ rad$$

1 случај

$$U_C^2 = \mathcal{E}^2 + U_{RL}^2 - 2\mathcal{E}U_{RL}\cos(\varphi+\varphi')$$

2 случај

$$U_C^2 = \mathcal{E}^2 + U_{RL}^2 - 2\mathcal{E}U_{RL}\cos(\varphi'-\varphi)$$

$$U_{RL} = I \cdot X_{RL}$$

$$U_{RL} = 2{,}47\,A \cdot 24\,\Omega$$

$$U_{RL} = 59{,}28\,V \Rightarrow U_R = 59{,}28\,V$$

$$U_L = 59{,}28\,V$$

1 случај

$$U_C^2 = 10000 + 3514{,}11 - 11856 \cdot \cos(1{,}075 + 0{,}64)$$

$$U_C = 123{,}36$$

2 случај

$$U_C^2 = 10000 + 3514{,}11 - 11856 \cdot \cos(0{,}64 - 1{,}075)$$

$$U_C = 116{,}25$$

$$U_C = I \cdot X_C$$

$$U_C = 2{,}47\,A \cdot 50\,\Omega$$

$$U_C = 123{,}5\,V \Rightarrow 1 \text{ случај}$$

$$\varphi = -1{,}075 \text{ rad}$$

Струја предњачи 1,075 rad у односу на напон

$U_R = 59{,}28\,V$

$U_L = 59{,}28\,V$

$U_C = 123{,}5\,V$

$I = 2{,}47\,A$

$I_R = \frac{U_R}{X_R}$

$I_R = \frac{59{,}28\,V}{30\,\Omega}$

$I_R \approx 1{,}97\,A$

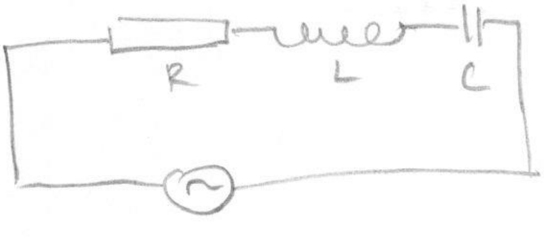
$I_L = \frac{U_L}{X_L}$

$I_L = \frac{59{,}28\,V}{40\,\Omega}$

$I_L = 1{,}482$

Задатак

17 На наизменични напон емс ε и учестаности f редно су везани отпорник R , калем L, и кондензатор C



а) израчунати укупну струју у колу

б) напоне на појединачним елементима кола

в) активну, реактивну и привидну снагу.

г) фактор снаге

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C$$

$$Z = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$Z = \ldots$$

$$I = \frac{U}{Z} = \ldots$$

$U_R = i Z_R$

$U_R = i \cdot R$

$U_L = i \, Z_L$

$U_L = i \, j\omega C$

$U_L = j \, i\omega C$

$U_C = i \cdot Z_C$

$U_C = i \cdot \frac{-j}{\omega C}$

$U_C = -j \, \frac{i}{\omega C}$

$S = P + jQ$

$S = UI$

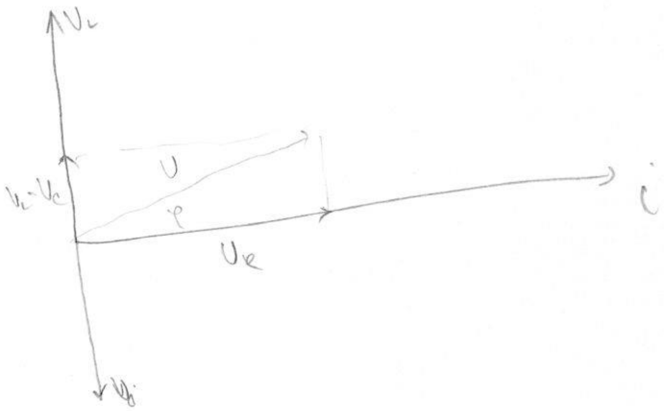
$P = U_R i_2 = Z_R i_2 i_2$

$P = Z_R i_2^2$

$Q = j \, Z_L i^2 + Z_c i^2$

$Q = \left(j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) i^2$

$\cos \varphi = \frac{Q}{S}$

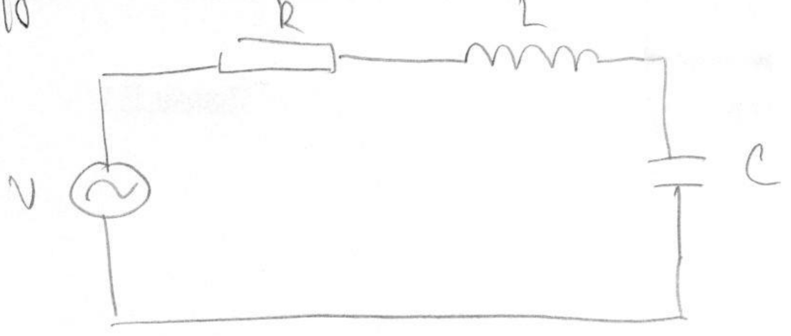


$U = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$

$\cos \varphi = \frac{Q}{S}$

18 За коло са слике

Задатак



$R = 10\Omega$

$L = 10mH$

$\omega = 1000 \frac{rad}{s}$

$\frac{1}{\omega C} = 20\Omega$

$V_c = 10\sqrt{2} \sin\left(1000t + \frac{\pi}{3}\right)$

израчунати напон V, активну снагу и фактор снаге

$V = V_R + V_L + V_C$

$i_c = \frac{V_c}{Z_c} = \frac{V_c}{-j\frac{1}{\omega C}} =$

$V_R = R \cdot i_c$

$V_L = Z_L \cdot i_c$

$V_c = 10\sqrt{2}\, e^{j(\omega t + \frac{\pi}{3})}$

$V = V_R + V_L + V_C$

$V_c = \underbrace{10\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{3}}}\, e^{j\omega t}$

$P = V_R \cdot i_c$

$i_c = \frac{10\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{3}}}{-j20}$

$S = P + jQ$

$S = V_{eff} \cdot I_{eff}$

$\cos\varphi = \frac{P}{S}$

Задатак

Електрични уређај утроши 24 kWh током 8 сати равномерног рада. Ако током рада он из мреже вуче струју јачине 15 A, одредити

а) Привидну, активну и реактивну снагу мотора

б) Фактор снаге мотора

в) Еквивалентну отпорност и реактансу мотора

г) Ефективну индуктивност мотора

а) $\tilde{S} = P + iQ$

$$P = \frac{24000\ Wh}{8h}$$

$$P = 3000\ W$$

$$S = I\,U = 15A \cdot 220V = 3300\ VA$$

$S^2 = P^2 + Q^2$

$3300^2 = 3000^2 + Q^2$

$Q^2 = 3300^2 - 3000^2$

$Q^2 = 10890000 - 9000000$

$Q^2 = 1890000$

$Q = 1374,77$

$Q = 1375\ VAr$

б) $\cos\varphi = \frac{P}{S}$

$\cos\varphi = \frac{3000}{3300}$

$\cos\varphi = 0{,}909$

в) $\cancel{P = U \cdot I}$

$P = R I^2$

$R = \frac{P}{I^2}$

$R = \frac{3000\ W}{15^2\ A^2}$

$R = \frac{3000}{225}\ \Omega$

$R = 13{,}3\ \Omega$

$Q = X \cdot I^2$

$X = \frac{Q}{I^2}$

$X = \frac{1375}{225}$

$X = 6{,}11\ \Omega$

г) $X_L = \omega L$

$L = \frac{X_L}{\omega}$

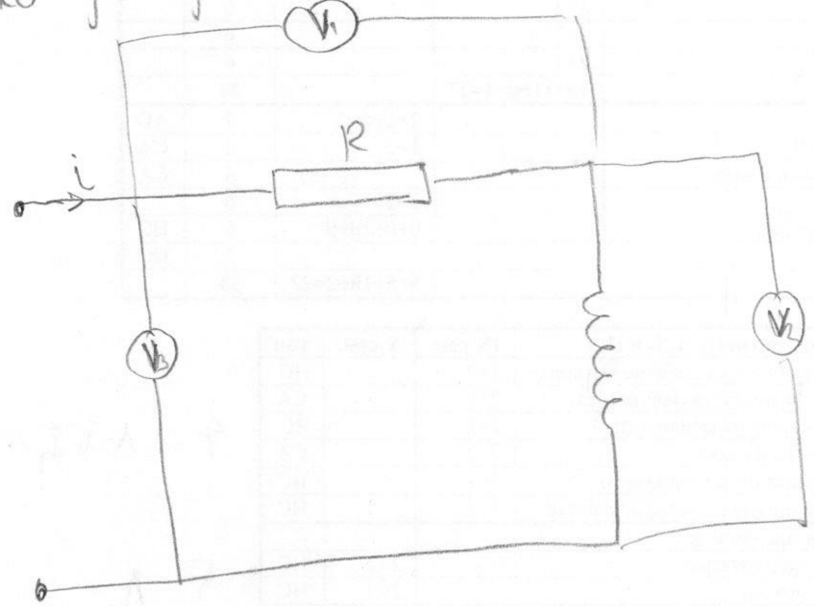
$L = \frac{X_L}{2\pi f}$

$L = \frac{6{,}11}{2\pi \cdot 50 Hz}$

$L = 19{,}4\ mH$

Задатак

2 У колу наизменичне струје са слике познато је да је показивање волтметра V_1 је 100 V, V_2 је 150 V и је $R = 10\,\Omega$. Одредити показивање трећег волтметра V_3 и индуктивност L ако је учестаност напона напајања 50 Hz

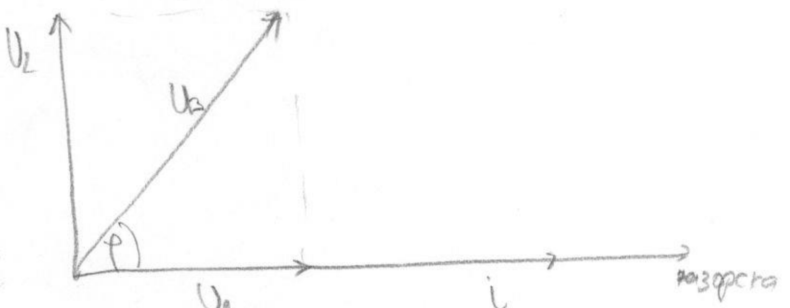


$U_{eff1} = 100\,V$

$U_{eff2} = 150\,V$

$R = 10\,\Omega$

Како је у питању редна веза иста струја тече кроз цело коло.



$U_{eff1} = R \cdot I_{eff}$

$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R} = \frac{100}{10} = 10\,A \ (I_{eff})$

Волтметар V_2 показује ефективну вредност напона на калему, па је индуктивна реактанса

$$U_{eff2} = X_L I_{eff}$$

$$X_L = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{150\ V}{10\ A} = 15\ \Omega$$

$$X_L = \omega L$$

$$L = \frac{X_L}{\omega}$$

$$L = \frac{15\ \Omega}{2\pi \cdot 50\ Hz} = 47{,}7\ mH$$

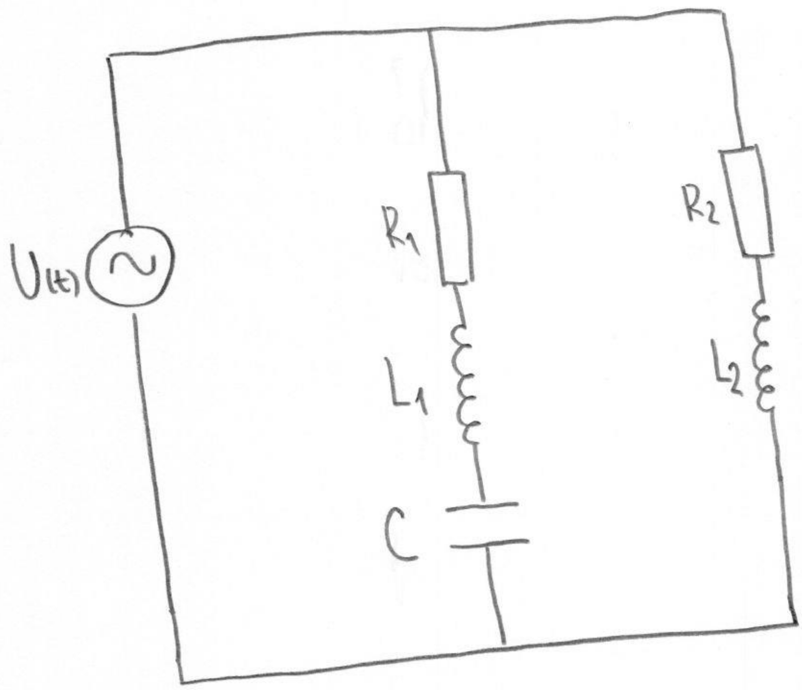
U_3 је са фазорског дијаграма:

$$U_3 = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$$

$$U_{eff3} = \sqrt{U_{eff1}^2 + U_{eff2}^2} = \sqrt{100^2 + 150^2} = 180{,}2\ V$$

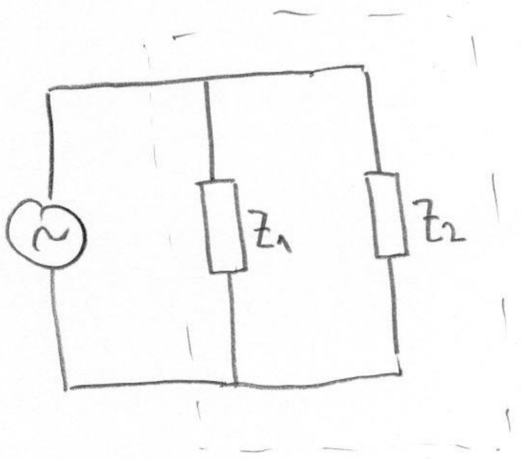
Задатак

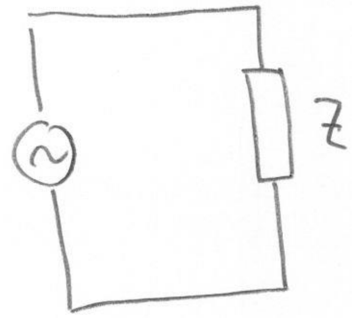
За коло са слике одредити капацитет кондензатора, тако да струје у гранама кола са соленоидима имају фазни померај од $\frac{\pi}{2}$. Израчунати снагу која се ослободи на отпорнику друге гране



$U_{(t)} = U_0 \sin \omega t$

Решење:





$$\tilde{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C}$$

$$\tilde{Z}_1 = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tilde{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}$$

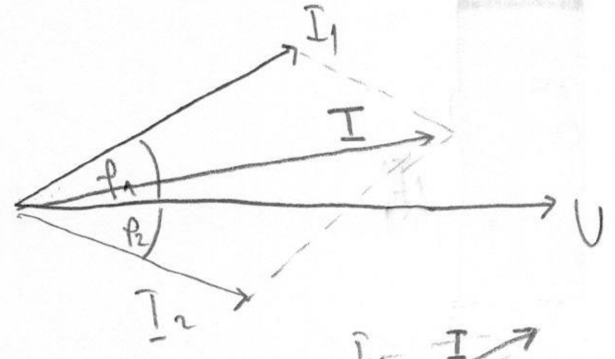
$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}$$

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

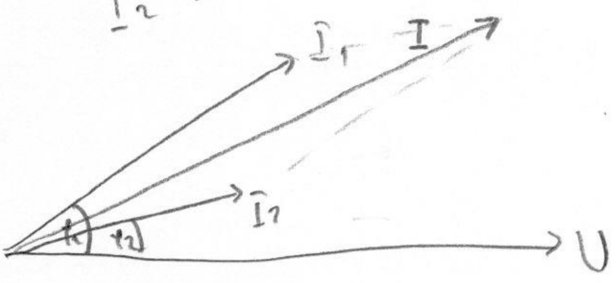
$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

1°



$$\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

2°



$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \tilde{Z}_1}{\operatorname{Re} \tilde{Z}_1}$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \tilde{Z}_2}{\operatorname{Re} \tilde{Z}_2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}}{R_1}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L_2}{R_2}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \quad \Big| \operatorname{tg}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg}\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \varphi_1}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\operatorname{ctg} \varphi_1$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1}$$

$$\frac{\omega L_2}{R_2} = -\frac{1}{\dfrac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}}{R_1}}$$

$$\frac{\omega L_2}{R_2} = -\frac{R_1}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}}$$

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} = -\frac{R_1 R_2}{\omega L_2}$$

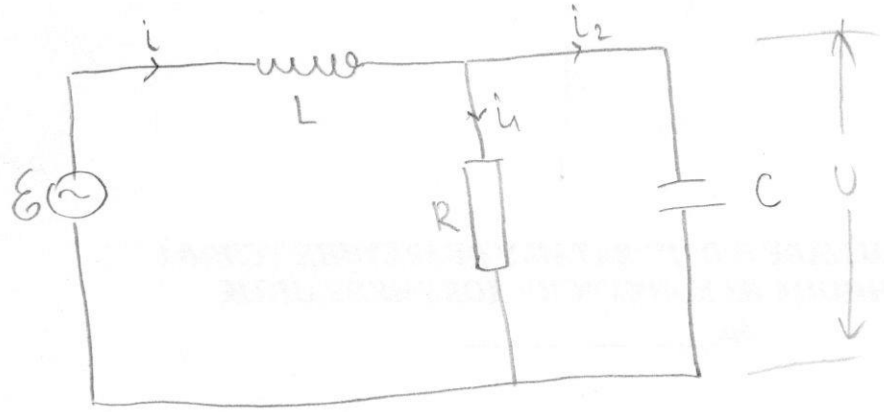
$$\frac{1}{\omega C} = \omega L_1 + \frac{R_1 R_2}{\omega L_2}$$

$$\frac{1}{C} = L_1 + \frac{R_1 R_2}{\omega^2 L_2}$$

$$C = \frac{1}{L_1 + \dfrac{R_1 R_2}{\omega^2 L_2}}$$

$$C = \frac{\omega^2 L_2}{\omega^2 L_1 L_2 + R_1 R_2}$$

16. Дато је коло са слике:



$\mathcal{E} = 50\ V$

$R = 30\ \Omega$

$L = 14{,}4\ mH$

$f = \frac{500}{\pi}\ Hz$

$C = 25\ \mu F$

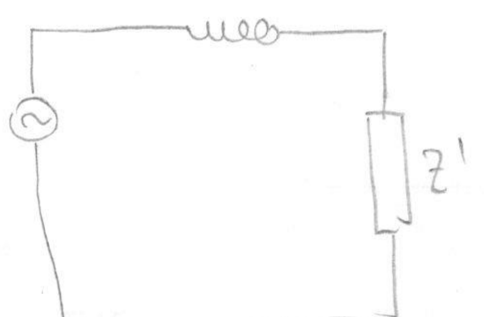
а) израчунати струје у гранама кола

б) одредити напоне на елементима

$Z_R = R$

$Z_C = -\frac{j}{\omega C}$

$Z_L = j\omega L$



$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C}$$

$$Z' = \frac{Z_R Z_C}{Z_C + Z_R}$$

$$Z = Z' + Z_L$$

$$Z = \frac{Z_R Z_C}{Z_C + Z_R} + Z_L$$

$$Z = \frac{30 \cdot (-40j)}{30 - j40} + \overset{14,4}{\cancel{25 \cdot 10^{-3}}}$$

$$Z = -\frac{1200\,j\,(30 + j40)}{30^2 + 40^2} + 14,4$$

$$Z = -\frac{3600j - 4800}{2500} + 14,4$$

$$Z = \frac{4800 - 3600j}{2500} + 14,4$$

$$Z = \frac{48 - 36j}{25} + \frac{14,4 \cdot 25}{25}$$

$$Z = \ldots$$

$$Z_R = 30\,\Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{2\pi \frac{500}{\pi} \cdot 25 \cdot 10^{-6}\,F}$$

$$Z_C = -\frac{j}{25 \cdot 10^{-3}}$$

$$Z_C = -\frac{j}{0,25 \cdot 10^{-1}}$$

$$Z_C = \cancel{-0,4j} - 40j\,\Omega$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_L = j\,2\pi\,\frac{500}{\pi}\,\cancel{25 \cdot 10^{-6}}\;14,4 \cdot 10^{-3}$$

$$Z_L = \cancel{25 \cdot 10^{-3}\,j}\,\Omega$$

$$Z_L = 14,4\,\Omega$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{Z}$$

$$\mathcal{E} = U_L + U$$

$$\cancel{\mathcal{E}_L} = \quad U = \mathcal{E} - U_L$$

$$i = \frac{U_L}{Z_L}$$

$$U_L = i Z_L$$

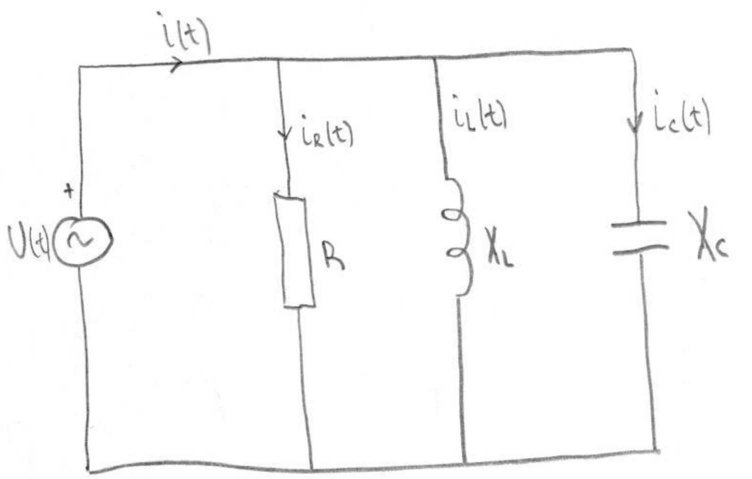
$$U = \mathcal{E} - i Z_L$$

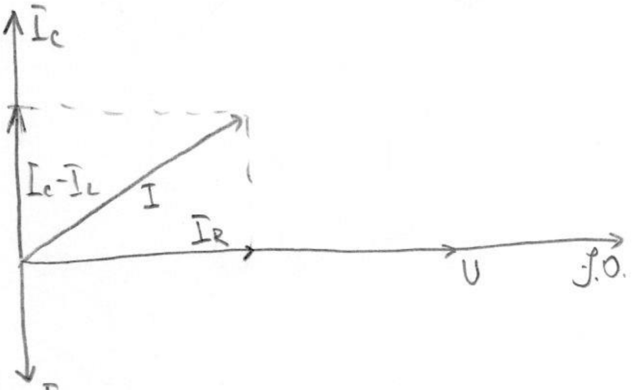
$$i = i_1 + i_2$$

$$i_1 = \frac{U}{R}$$

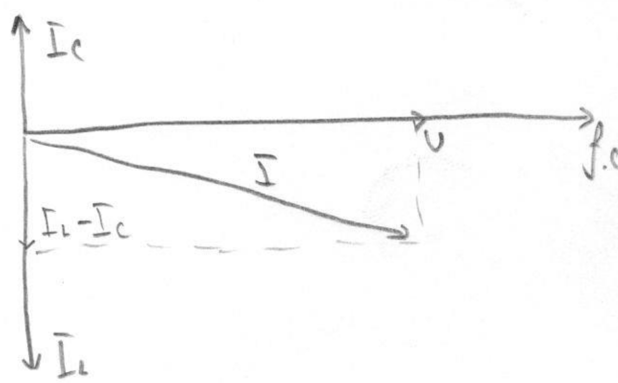
$$i_2 = \frac{U}{Z_C}$$

На слици је дато паралелно RLC коло прикључено на извор простопериодичног напона. Дате су ефективне вредности струја у грани са отпорником и кондензатором редом $I_R = 5mA$ и $I_C = 20mA$. Одредити ефективну вредност струје I_L у грани са калемом ако је ефективна вредност напојне струје $I = 13$ mA





$I_L < I_C$



$I_L > I_C$

1° $(I_L - I_C)^2 + I_R^2 = I^2$

2° $(\bar{I}_C - \bar{I}_L)^2 + \bar{I}_R^2 = \bar{I}^2$

$(I_L - 20mA)^2 + (5mA)^2 = (13mA)^2$

$(I_L - 20mA)^2 = 169mA^2 - 25mA^2$

$(I_L - 20mA)^2 = 144mA^2$

$I_L - 20mA = \pm 12mA$

$I_L = 20mA \pm 12mA$

$I_{L1} = 8\,mA \quad \vee \quad I_{L2} = 32\,mA$

Потрошачи везани преко истог осигурача у кућној инсталацији се везују паралелно. У једном тренутку су укључени фрижидер са мотором активне снаге $900W$ и фактора снаге 0.85, бојлер активне снаге $1760W$ и електрична пећ активне снаге $\cancel{2200}W$ 1800W. Ако се усвоји да уређаји који производе топлоту имају фактор снаге приближно једнак јединици, одредити:

a. Реактивну и привидну снагу мотора фрижидера.
b. Ефективне јачине струја потрошача
c. Ефективну јачину струје која протиче кроз осигурач.

Градска мрежа има ефективну вредност напона од $220V$.

a) $\hat{S} = P + jQ$

$S = I_{eff} \cdot U_{eff}$

$P = I_{eff} \cdot U_{eff} \cdot \cos\varphi$

$Q = I_{eff} \cdot U_{eff} \cdot \sin\varphi$

$S^2 = P^2 + Q^2$

$P = 900\ W$

$\cos\varphi = 0{,}85$

$P = S \cos\varphi$

$S = \frac{P}{\cos\varphi}$

$S = \frac{900\ W}{0{,}85}$

$S = 1058\ VA$

$S^2 = P^2 + Q^2$

$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$

$Q = \sqrt{1119364 - 810000}$

$Q = 556\ VAr$

b) $P = U_{eff} \, I_{eff} \cdot \cos\varphi$

фрижидер

$\cos\varphi = 0{,}85$

$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$

$I_{eff} = \dfrac{P}{U_{eff} \cdot \cos\varphi}$

$I_{eff} = \dfrac{900\ W}{220\ V \cdot 0{,}85}$

$I_{eff} = 4{,}81\ A$

бојлер

$\cos\varphi \approx 1$

$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$

$I_{eff} = \dfrac{P}{U_{eff}}$

$I_{eff} = \dfrac{1760\ W}{220\ V}$

$I_{eff} = 3{,}45\ A$

пећ

$\cos\varphi \approx 1$

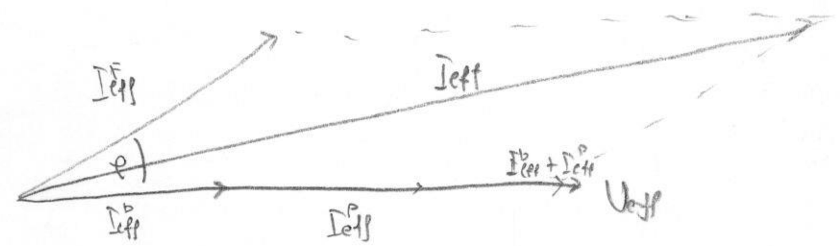
$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$

$I_{eff} = \dfrac{P}{U_{eff}}$

$I_{eff} = \dfrac{1800\ W}{220\ V}$

$I_{eff} = 8{,}18\ A$

c)



$I_{eff}^2 = I_{eff}^{F\,2} + \left(I^b_{eff} + I^p_{eff}\right)^2 + 2\, I^F_{eff} \left(I^b_{eff} + I^p_{eff}\right) \cos\varphi$

$I_{eff}^2 = (4{,}81)^2 + (8{,}18 + 3{,}45)^2 + 2 \cdot 4{,}81 \, (8{,}18 + 3{,}45) \cdot 0{,}85 \quad [A^2]$

$I_{eff}^2 = 23{,}1 + 135{,}26 + 95{,}1 \ [A^2]$

$I_{eff}^2 \approx 253{,}45\ A^2$

$I_{eff} = 15{,}92\ A$