# - Максвелове једначине -

Диференцијални облик:

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Интегрални облик:

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \int_V \rho\, dV$$

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}\, d\vec{\ell} - \oint_L \vec{B}\times\vec{v}\, d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}\, d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\, d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$$

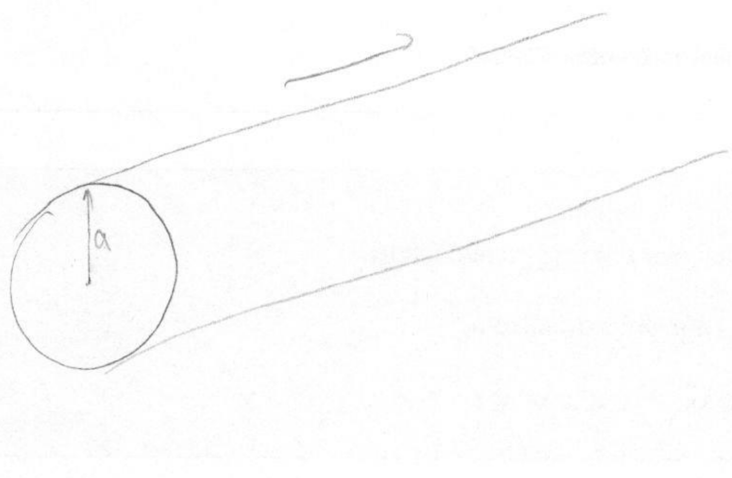
1) Кроз цилиндрични проводник полупречника $a$ и специфичне проводљивости $\lambda$ протиче стална струја $I$ која је распоређена униформно по попречном пресеку.

а) Израчунати ~~електрично поље~~ $\vec{E}$ унутар проводника

б) Израчунати ~~магнетно поље~~ $\vec{B}$ ван проводника

в) Израчунати Поинтингов вектор $\vec{P}$ на површини проводника

г) Израчунати снагу (тј.) енергију у јединици времена која се ослободи на површини проводника



а) Нека струја тече у правцу z-осе

Електрично поље је дато као

$$\vec{J} = \lambda \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{SR} = \frac{l}{\pi a^2 R} \qquad \underline{R = \rho \frac{l}{S}}$$

$$J = \frac{I}{\pi a^2}$$

$$\vec{E} = \frac{I}{\lambda \pi a^2} \vec{k}$$

б) Магнетно поље се може одредити Амперовим законом (теорема о циркулацији вектора јачине магнетног поља)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{\varphi}$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

в) Поинтингов вектор на површини проводника $r=a$

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{P} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} =$$

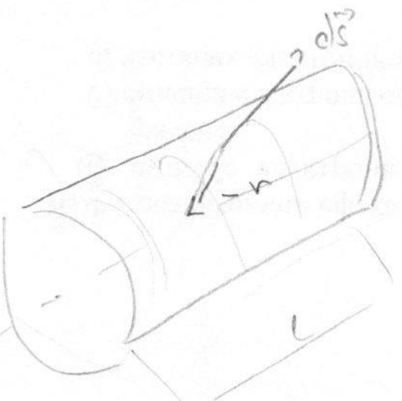
$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{I}{\lambda \pi a^2} \vec{k} \right) \times \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{\varphi} \right)$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\cancel{\mu_0}} \frac{I}{\lambda \pi a^2} \frac{\cancel{\mu_0} I}{2\pi a} \underbrace{\vec{k} \times \vec{\varphi}}_{-\vec{r}}$$

$$\vec{P} = -\frac{I^2}{2\pi^2 \lambda a^3} \vec{r}$$

$\vec{P}$ је усмерен радијално ка центру проводника

I) $\left|\iint_S \vec{P}\, d\vec{S}\right| = \iint_S -\frac{I^2}{2\pi^2\lambda a^3}\, 2\pi a \cdot l \cdot d\vec{s}\ \vec{r}\,\vec{r} = P$ (снага)




$$P_{снага} = \iint_S \vec{P}\, d\vec{S} = \frac{I^2}{2\lambda\pi^2 a^3}\, 2\pi a l = \frac{I^2 l}{\lambda\pi a^2}$$

Како је $\lambda = \frac{1}{\rho}$ $\quad R = \rho\frac{l}{S}$

$$\lambda = \frac{l}{\pi a^2 R}$$

$$P = \frac{I^2 l}{\frac{l}{\pi a^2 R}\pi a^2} = I^2 R$$ што представља снагу ослобођену на отпорнику $R$

Кроз праволинијски проводник дужине $l$ и полупречника $R$, тече наизменична струја облика

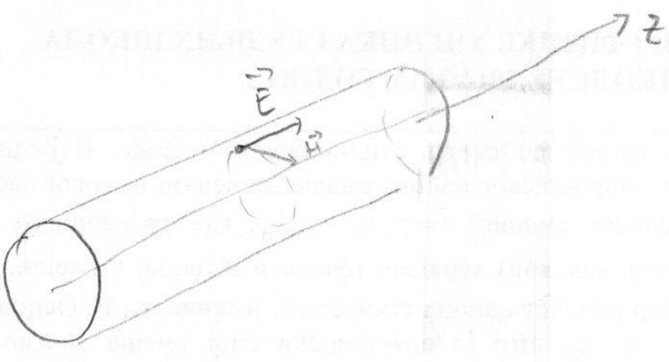
$$I = I_0 \sin \omega t$$

а) одредити јачину магнетног поља унутар проводника

б) написати израз за Поинтингов вектор на површини проводника

в) одредити средњу вредност Поинтинговог вектора на површини проводника, усредњену по периоду осциловања

г) одредити снагу која се ослободи са површине проводника




a) $I = I_0 \sin \omega t$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$j = |\vec{j}| = \frac{I}{S} = \frac{I_0 \sin \omega t}{R^2 \pi}$$

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I_0 \sin \omega t}{R^2 \pi \sigma}$$

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \vec{j}_p) d\vec{S}$$

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = i + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$$

$\vec{H} \parallel d\vec{l}$

$$\oint_l H dl = j \cdot S + \int_S \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E}) d\vec{S}$$

$$H \oint_l dl = \frac{I_0 \sin \omega t}{R^2 \pi} \cdot r^2 \pi + \int_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}$$

$\vec{E} \parallel d\vec{S}$

$$H \cdot 2\pi r = \frac{I_0 \sin \omega t}{R^2 \pi} \cdot r^2 \pi + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{I_0 \sin \omega t}{R^2 \pi \sigma} \right) dS$$

$$H \cdot 2\pi r = \frac{r^3}{R^2} I \sin\omega t + \varepsilon_0 \int_S \frac{I_0 \omega \cos\omega t}{R^2 \pi \sigma} dS$$

$$H \cdot 2\pi r = \frac{r^2}{R^2} \cdot I_0 \sin\omega t + \frac{\varepsilon_0 I_0 \omega \cos\omega t}{R^2 \pi \sigma} \int dS$$

$$H \cdot 2\pi r = \frac{r^2}{R^2} I_0 \sin\omega t + \frac{\varepsilon_0 I_0 \omega \cos\omega t}{R^2 \pi \sigma} r^2 \pi$$

$$H \, 2\pi r = \frac{r^2}{R^2} I_0 \sin\omega t + \frac{\varepsilon_0 I_0 \omega r^2}{R^2 \sigma} \cos\omega t$$

$$H \, 2\pi r = \frac{r^2}{R^2} I_0 \left( \sin\omega t + \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} \cos\omega t \right)$$

$$H(r) = \frac{r}{2\pi R^2} I_0 \left( \sin\omega t + \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} \cos\omega t \right)$$

б) $r = R$

$$\vec{E} = \frac{I_0 \sin\omega t}{R^2 \pi \sigma} \vec{e}_z$$

$$\vec{H} \overset{r=R}{=} \frac{R}{2\pi R^2} I_0 \left( \sin\omega t + \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} \cos\omega t \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{H} = \frac{I_0}{2\pi R} \left( \sin\omega t + \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} \cos\omega t \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{P} = \frac{I_0 \sin\omega t}{R^2 \pi^2 \sigma} \vec{e}_z \times \frac{I_0}{2\pi R}\left(\sin\omega t + \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}\cos\omega t\right)\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{P} = -\frac{I_0^2}{2\pi^2 R^3 \sigma}\left(\sin^2\omega t + \frac{\varepsilon_0\omega}{\sigma}\sin\omega t\cos\omega t\right)\vec{e}_r$$

c) $$\overline{|\vec{P}|} = \frac{1}{T}\int_0^T |\vec{P}|\,dt \equiv P$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_0^2}{2\pi^2 R^3 \sigma}\left(\sin^2\omega t + \frac{\varepsilon_0\omega}{\sigma}\sin\omega t\cos\omega t\right)dt$$

$$P = \frac{1}{T}\frac{I_0^2}{2\pi^2 R^3\sigma}\left(\int_0^T \sin^2\omega t\,dt + \frac{\varepsilon_0\omega}{\sigma}\int_0^T \sin\omega t\cos\omega t\,dt\right)$$

$$\int_0^T \sin\omega t\cos\omega t\,dt = -\int_0^T \frac{1}{\omega}\cos\omega t\,d(\cos\omega t) = -\frac{1}{\omega}\frac{\cos^2\omega t}{2}\Big|_0^T =$$

$$= -\frac{1}{2\omega}\left(\cos^2\omega T - \cos^2 0\right) = -\frac{1}{2\omega}\left(\cos^2\frac{2\pi}{T}T - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{2\omega}(1-1) = 0$$

$$\int_0^T \sin^2\omega t\,dt = \int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^T dt - \frac{1}{2}\int_0^T \cos 2\omega t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{2\omega}\cos 2\omega t\,d(2\omega t) = \frac{1}{2}T - \frac{1}{4\omega}\sin 2\omega t\Big|_0^T =$$

$$= \frac{1}{2}T - \frac{1}{4\omega}\left(\underbrace{\sin 2\frac{2\pi}{T}T}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}\right) = \frac{1}{2}T$$

$$P = \frac{1}{T} \frac{I_0^2}{2\pi^2 R^3 \sigma}\left(\frac{1}{2}T - \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} 0\right) =$$

$$= \frac{1}{T} \frac{I_0^2}{2\pi^2 R^3 \sigma} \cdot \frac{1}{2}\cancel{T} = \frac{I_0^2}{4\pi^2 R^3 \sigma}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$R_{otp} = \rho \cdot \frac{l}{S} = \rho \cdot \frac{l}{R^2 \pi}$$

$$\rho = R_{otp} \cdot \frac{R^2 \pi}{l}$$

$$\sigma = \frac{l}{R_{otp} \cdot R^2 \pi}$$

$$P = \frac{I_0^2}{4\pi^2 R^3 \cdot \frac{l}{R_{otp} \cdot R^2 \pi}}$$

$$P = \frac{I_0^2 R_{otp}}{4\pi l}$$

c) $P_{snaga} = \iint \vec{P}\, d\vec{S}$ $\qquad P_{snaga} = \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 R_{otp}$

$$P_{snaga} = \iint \frac{I_0^2 R_{otp}}{4\pi R l} \cdot dS \qquad P_{snaga} = I_{eff}^2 R_{otp}$$

$$P_{snaga} = I_{eff} U_{eff}$$

$$P_{snaga} = \frac{I_0^2 R_{otp}}{4\pi R l} \cdot 2R\pi \cdot l$$

$$P_{snaga} = \frac{I_0^2 R_{otp}}{2}$$

У цилиндричном диелектрику диелектричне константе $\varepsilon$, дужине $l$ и полупречника $R$ постоји електрично поље чија се јачина мења временом:

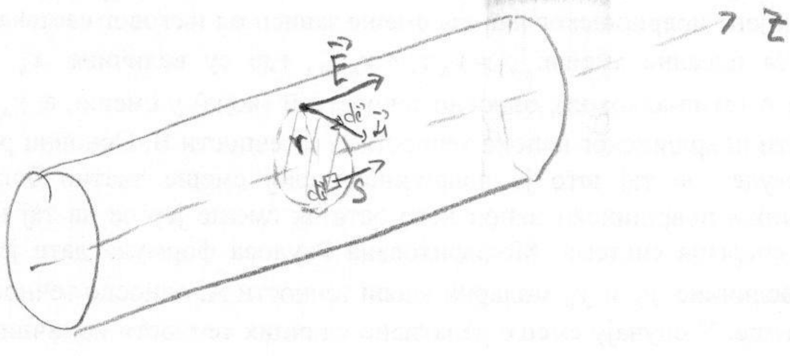
$$E = E_0 \sin \omega t$$

Електрично поље је управљено дуж осе цилиндра.

а) Одредити јачину магнетног поља унутар диелектрика.

б) Написати израз за Поинтингов вектор на површини диелектрика.

в) Одредити средњу вредност Поинтинговог вектора на површини диелектрика, усредњену по периоду осциловања.




$$\vec{E} = E_0 \sin\omega t \, \vec{e}_z$$

$$\oint_C \vec{H}\, d\vec{l} = i + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, d\vec{S}$$

$$\vec{H} \parallel d\vec{l} \quad ; \; i = 0 \; ; \; \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad ; \quad \vec{E} \parallel d\vec{S}$$

$$\oint_C H\, dl = \int_S \frac{\partial D}{\partial t}\, dS$$

$$H \oint_C dl = \int_S \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \varepsilon E)\, dS$$

$$H \cdot 2\pi r = \varepsilon_0 \varepsilon \int_S \frac{\partial E}{\partial t}\, dS$$

$$2\pi r H = \varepsilon_0 \varepsilon \int_S \frac{\partial}{\partial t}(E_0 \sin\omega t)\, dS$$

$$2\pi r H = \varepsilon_0 \varepsilon \int_S E_0 \omega \cdot \cos\omega t \, dS$$

$$2\pi r H = \varepsilon_0 \varepsilon \, \omega E_0 \cos\omega t \int_S dS$$

$$\cancel{2\pi} r H = \varepsilon_0 \varepsilon \omega E_0 \cos \omega t \cdot r^{\cancel{2}} \cancel{\pi}$$

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \omega E_0 \cos \omega t \cdot r$$

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \omega r E_0 \cos \omega t$$

$$\vec{H}(r) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \omega r E_0 \cos \omega t \ \vec{e}_\varphi$$

б) $r = R$

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{E} = E_0 \sin \omega t \ \vec{e}_z$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \omega R E_0 \sin \omega t \ \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \left(E_0 \sin \omega t \ \vec{e}_z\right) \times \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \omega R E_0 \cos \omega t \ \vec{e}_\varphi\right)$$

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \cdot \omega R \cdot \sin \omega t \cos \omega t \ \vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{P} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \omega R \sin \omega t \cos \omega t \ \vec{e}_r$$

б) $\overline{|\vec{P}|} = \frac{1}{T}\int_0^T |\vec{P}|\,dt = P$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E_0^2\,\omega R \sin\omega t \cos\omega t\,dt$$

$$P = \frac{1}{2T}\varepsilon_0\varepsilon E_0^2\,\omega R\int_0^T \sin\omega t\cos\omega t\,dt$$

$$P = \frac{1}{2T}\varepsilon_0\varepsilon E_0^2\,\omega R\int_0^T \frac{1}{\omega}\cos\omega t\,d(\cos\omega t)$$

$$P = \frac{1}{2T}\varepsilon_0\varepsilon E_0^2 R\left.\frac{\cos^2\omega t}{2}\right|_0^T$$

$$P = \frac{1}{2T}\varepsilon_0\varepsilon E_0^2 R\cdot\frac{1}{2}\left(\cos^2\omega T - \underbrace{\cos^2 0}_{1}\right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$P = \frac{1}{2T}\varepsilon_0\varepsilon E_0^2 R\cdot\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{2\pi}{T}T - 1\right)$$

$$P = \frac{1}{4T}\varepsilon_0\varepsilon E_0^2 R\,\underbrace{(1-1)}_{0}$$

$$P = 0$$

Радиостаница емитује сигнал изотропно (једнако у свим правцима) са просечном снагом од 4 kW. Диполна антена пријемник је дугачка 65 cm на локацији 6,43 km од радиостанице. Израчунати амплитуду напона који се индукује сигналом између крајева антене пријемника.

Снага коју емитује радиостаница се простире сферно и долази до пријемника који је удаљен 6,43 km.

Средњи интензитет је:

$$I = \frac{P_s}{S} = \frac{P_s}{4\pi R^2} = \frac{4 \cdot 10^3\ W}{4\pi\ (6,43 \cdot 10^3\ m)} = 7,68\ \frac{\mu W}{m^2} = \bar{P}$$

Средњи интензитет је у вези са максималном јачином електричног поља:

$$I = \bar{P} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c} = \bar{P}$$ (средња вредност Поинтинговог вектора)

$$E_{max} = \sqrt{2\mu_0 c\, I}$$

$$E_{max} = \sqrt{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot 3 \cdot 10^{8} \frac{m}{s} \cdot 7{,}68 \cdot 10^{-6} \frac{W}{m^2}}$$

$$1H = \frac{1J}{m^2} \qquad 1W = \frac{1J}{1s}$$

$$E_{max} = 76{,}1 \ \frac{mV}{m}$$

Напон на крајевима антене пријемника је

$$\Delta V = L \, E_{max} = 65 \cdot 10^{-2} m \cdot 76{,}1 \cdot 10^{-3} \frac{V}{m}$$

$$\Delta V = 49{,}4 \ mV$$

$$E = E_0 \sin \omega t$$

$$H = H_0 \sin \omega t$$

$$\overline{P} = |\vec{E} \times \vec{H}| = E_0 \cdot H_0 \cdot \underbrace{\overline{\sin^2 \omega t}}_{=\frac{1}{2}}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2} E_0 H_0$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2} E_0 \frac{E_0}{\mu_0 c} \Rightarrow E_0^* = \sqrt{2 \overline{P} \mu_0 c}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

$$\sqrt{\varepsilon_0} \, E = \sqrt{\mu_0} \, H$$

$$\sqrt{\varepsilon_0} \, E_0 = \sqrt{\mu_0} \, H_0$$

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} E_0}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\mu_0}} = \frac{\overbrace{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}^{=\frac{1}{c}} E_0}{\mu_0} = \frac{E_0}{\mu_0 c}$$

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t \, dt =$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\,dt - \frac{1}{T}\frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{2\omega}\cdot\cos 2\omega t \, d(2\omega t)$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^T dt - \frac{1}{2T\,2\omega}\int_0^T \cos 2\omega t \, d(2\omega t) =$$

$$= \frac{1}{2T}\, t\Big|_0^T - \frac{1}{2T\,2\omega}\, \sin 2\omega t \Big|_0^T$$

$$= \frac{1}{2T}(T-0) - \frac{1}{2T\,2\omega}\left(\sin 2\omega T - \overset{=0}{\sin 0}\right)$$

$$2\,\frac{2\pi}{T}\,T$$

$$\sin 4\pi = 0$$

$$0$$

$$= \frac{T}{2T} = \frac{1}{2}$$

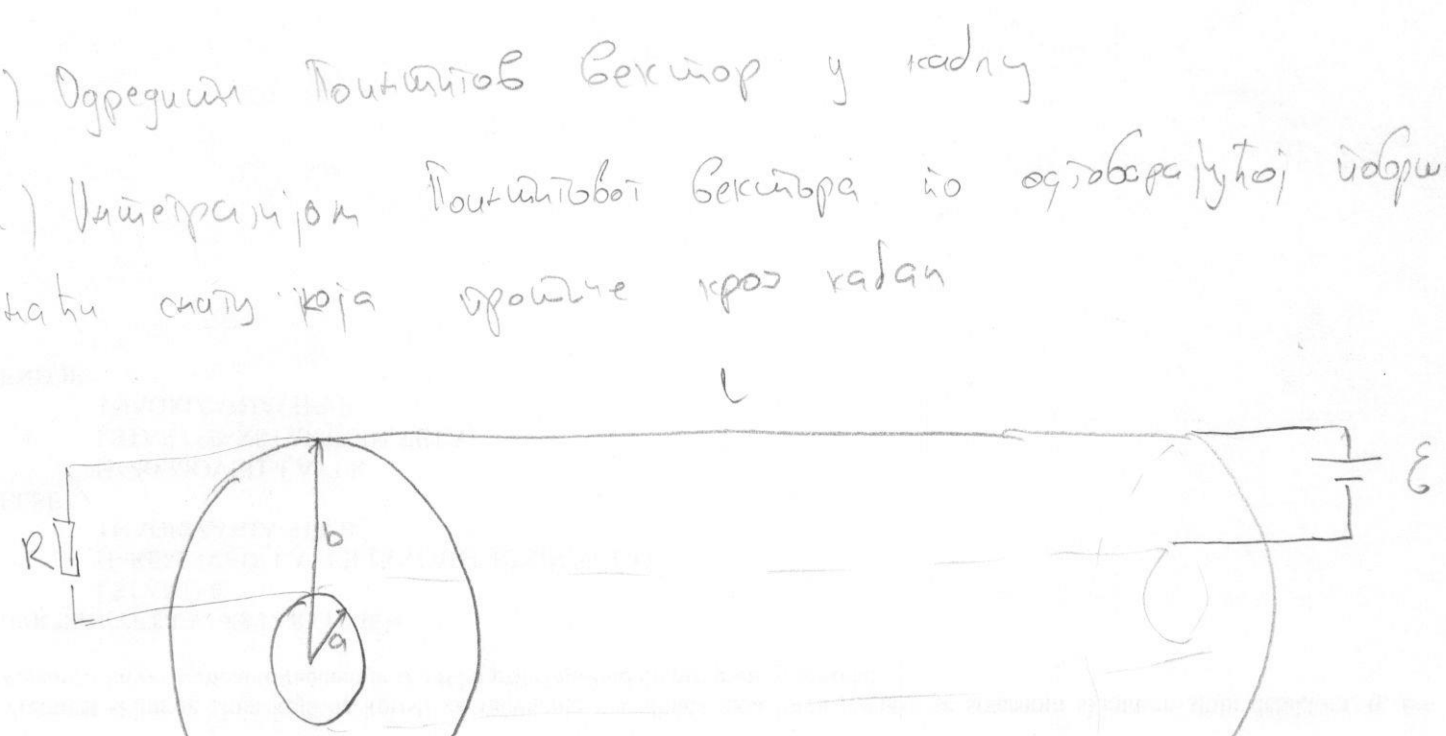
Коаксијални кабал се састоји од два концентрична дуга и шупља цилиндра нулте отпорности. Унутрашњи радијус ја $a$ а спољашњи $b$, а дужина оба цилиндра је $l$, при чему је $l \gg b$. Кабал проводи једносмерну струју од извора електромоторне силе $\mathcal{E}$ до потрошача у виду отпорника отпорности $R$. Кроз кабал тече струја $I$, а батерија наелектрише унутрашњи проводник наелектрисањем $-Q$ а спољашњи $+Q$.

а) Наћи правац и интензитет електричног поља $\vec{E}$

б) Наћи правац и интензитет магнетног поља, $\vec{B}$

в) Одредити Поинтингов вектор у каблу

г) Интеграцијом Поинтинговог вектора по одговарајућој површини наћи снагу која протиче кроз кабал



а) Посматрајмо цилиндар радијуса $r$ и дужине $l$

ако је $r<a$ и $r>b$ нема наелектрисања обухваћеним цилиндричном површи и поље је једнако нули

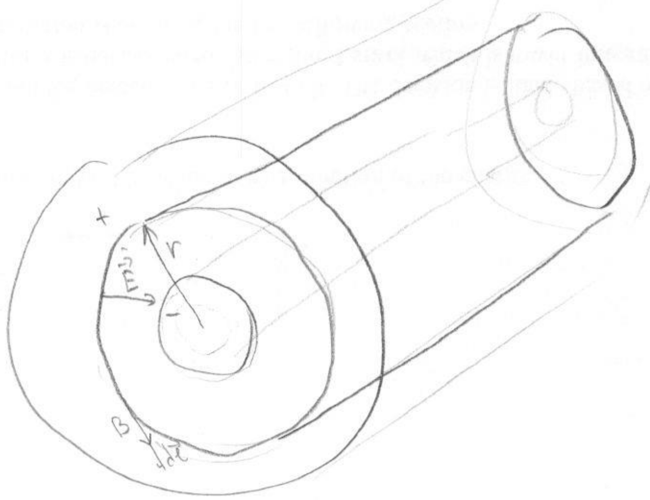
$r>b$

укупно наелектрисање је $-Q+Q=0$

Између цилинда $(a<r<b)$ површином је обухваћено наелектрисање $-Q$ и укупан флукс је

$$\Phi = \oiint_S \vec{D}\,d\vec{S} = q_{enc}$$

$$\Phi = \oiint_S \varepsilon_0 \vec{E}\,d\vec{S} = q_{enc}$$



$$\frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \oiint_S \vec{E}\,d\vec{S}$$

$$q_{enc} = -Q$$

$$\frac{-Q}{\varepsilon_0} = E(2\pi r l)$$

$$E = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$

$$\vec{E} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\vec{r} \quad (a<r<b)$$

ка центру проводника

$\vec{E}=0$ у осталом делу простора

б) Према Амперовом закону

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = i$$

$r < a \qquad i = 0 \qquad \vec{H} = 0$

$r > b \qquad i = I - I = 0 \qquad \vec{H} = 0$

$a < r < b \qquad i = -I$

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = -I$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B}\, d\vec{l} = -I$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = -\mu_0 \cdot I$$

$$B \cdot 2\pi r = -\mu_0 I$$

$$B = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, \vec{\varphi}$$

б) $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\vec{P} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

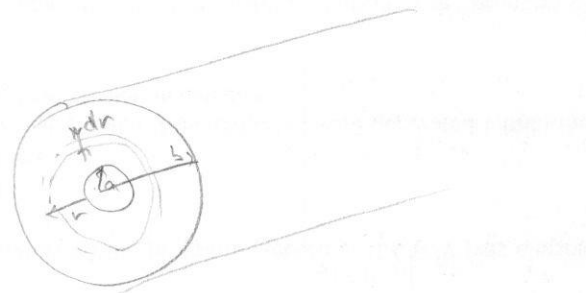
$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\vec{r}\right) \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{\varphi}\right) \qquad \vec{r} \times \vec{\varphi} = \vec{k}$$

$$\vec{P} = \frac{QI}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2 l}\vec{k} \qquad (a < r < b)$$

$$\vec{P} = 0 \qquad 0 < r < a \quad \text{и} \quad r > b$$

в)




$$P_{\text{снага}} = \iint_S \vec{P}\, d\vec{S} = \iint_S \frac{QI}{4\pi^2\varepsilon_0 r^2 l}\vec{k} \cdot 2\pi r\, dr\, \vec{k}$$

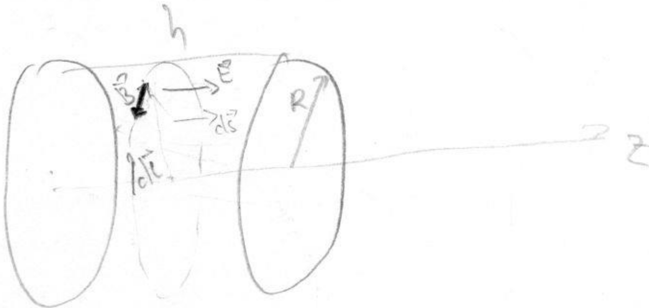
$$P_s = \frac{QI}{4\pi^2\varepsilon_0 l}\int_a^b \frac{1}{r^2} 2\pi r\, dr = \frac{QI}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_a^b \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{QI}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln r \Big|_a^b = \frac{QI}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\frac{b}{a}$$

Равански кондензатор са кружним плочама полупречника R које су раздвојене на раздаљину h се пуни струјом I

а) Док се кондензатор пуни одредити Поинтингов вектор између плоча кондензатора

б) Наћи енергију електромагнетног поља




Нека се у тренутку t акумулирало наелектрисање Q

Електрично поље је

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k}$$

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0}\vec{k}$$

На основу Максвелове једначине у интегралној форми

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = i + \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \qquad \Phi = \iint_S \vec{D} d\vec{S}$$

$$\oint_l \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{l} = i + \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{D} d\vec{S}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \text{- померај}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_l \vec{B} d\vec{l} = i + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} d\vec{S}$$

$$\oint_l B dl = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint E ds$$

$$B \oint_l dl = \cancel{\mu_0 i}^{\,0} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left( E \iint ds \right)$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left( E\, r^2 \pi \right)$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0} r^2 \pi\right)$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cancel{\varepsilon_0} \frac{r^2 \cancel{\pi}}{\cancel{\pi} R^2 \cancel{\varepsilon_0}} \frac{dQ}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt} \vec{\varphi}$$

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0} \vec{k}\right) \times \left(\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt} \vec{\varphi}\right)$$

$$\vec{k} \times \vec{\varphi} = -\vec{r}$$

$$P = -\frac{Q r}{2\pi^2 R^4 \varepsilon_0} \frac{dQ}{dt} \vec{r}$$

$$\int \vec{P}\, d\vec{s} = P \cdot S = \frac{Q r}{2\pi^2 \varepsilon_0 R^4} \frac{dQ}{dt} (2\pi R h)$$

$$= \frac{Q h}{\varepsilon_0 \pi R^2} \frac{dQ}{dt}$$

Сијалица од 100W емитује електромагнетно зрачење. Израчунати снагу која се ослбоди на растојању од једног метра од сијалице. Које су амплитудне вредности јачине електричног поља и индукције магнетног поља на том растојању од сијалице? Претпоставити да су у питању равански таласи.

$$\bar{P} = \frac{P_{zraka}}{S}$$

$$S = 4\pi R^2$$

$$R = 1m$$

$$S = 4 \cdot \pi \cdot 1m^2$$

$$S = 12{,}56\, m^2$$

$$\bar{P} = \frac{100\,W}{12{,}56\,m^2} = 7{,}96 \frac{W}{m^2} \quad 8 \frac{W}{m^2}$$

$$\bar{P} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

$$E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \bar{P}}$$

$$E_0 = \sqrt{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 8}$$

$$E_0 = \sqrt{192 \cdot \pi \cdot 10}$$

$$E_0 = \sqrt{602{,}68 \cdot 10}$$

$$E_0 = \sqrt{6026{,}8}$$

$$E_0 = 77{,}6 \frac{V}{m}$$

$$\sqrt{\varepsilon_0}\, E_0 = \sqrt{\mu_0}\, H_0$$

$$B_0 = \frac{H_0}{\mu_0}$$

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}} E_0$$

$$B_0 = 25,8 \cdot 10^{-8}\ T$$

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\mu_0}} E_0$$

$$H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\mu_0} E_0$$

$$H_0 = \frac{E_0}{\mu_0 c}$$

$$H_0 = \frac{77,6}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{8}}$$

$$H_0 = \frac{2,06}{10}$$

$$H_0 = 0,206\ H$$

Одредити Поинтингов вектор и интензитет ~~за~~ стојећег таласа датог као

$$E_y(x,t) = 2E_0 \cos kx \cos \omega t \, , \qquad B_z(x,t) = 2B_0 \sin kx \sin \omega t$$

Поинтингов вектор за стојећи талас је дат као

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} (2E_0 \cos kx \cos \omega t \, \vec{j}) \times (2B_0 \sin kx \sin \omega t \, \vec{k})$$

$$\vec{P} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} (2 \cos kx \sin kx)(2 \cos \omega t \sin \omega t) \, \vec{j} \times \vec{k}$$

$$\vec{P} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin 2kx \sin 2\omega t \, \vec{i}$$

Стојећи талас се у делу простора
осцилује ~~за~~ дуж ~~правој~~ x-осе

Средња вредност за период осциловања

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P \, dt$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin 2kx \sin 2\omega t \, dt$$

$$\overline{P} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0 T} \sin 2kx \int_0^T \sin 2\omega t \, dt$$

$$\overline{P} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0 T} \sin 2kx \frac{1}{2\omega} \int_0^T \sin 2\omega t \, d(2\omega t)$$

$$\overline{P} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0 T \, 2\omega} \sin 2kx \cos 2\omega t \Big|_T^0$$

$$\overline{P} = \frac{E_0 B_0}{2\omega \mu_0 T} \sin 2kx \left(\underbrace{\cos 0}_{=1} - \cos 2\omega T\right)$$

$$\overline{P} = \frac{E_0 B_0}{2\omega \mu_0 T} \sin 2kx \Big(1 - \underbrace{\cos \underbrace{2 \frac{2\pi}{T} T}_{4\pi}}_{=1}\Big)$$

$$\overline{P} = \frac{E_0 B_0}{2\omega \mu_0 T} \sin 2kx \, (1 - 1)$$

$$\overline{P} = 0$$

Стојећи талас се не простире