Задатак

Један од могућих извора светлости је шупљина чији су зидови на константној температури од 4000 °K и има отвор полупречника 5 mm.

а) Колика се снага емитује из шупљине у видљивом делу спектра (0,4 - 0,7 μm)?

б) Колика је укупна емитована снага?

в) Колика је таласна дужина која одговара максимуму зрачења?

г) Којом фреквенцијом осцилује талас који припада максимуму зрачења?

Решење:

Планков закон зрачења, спектрална емисиона моћ:

$$r_{\lambda T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1}$$

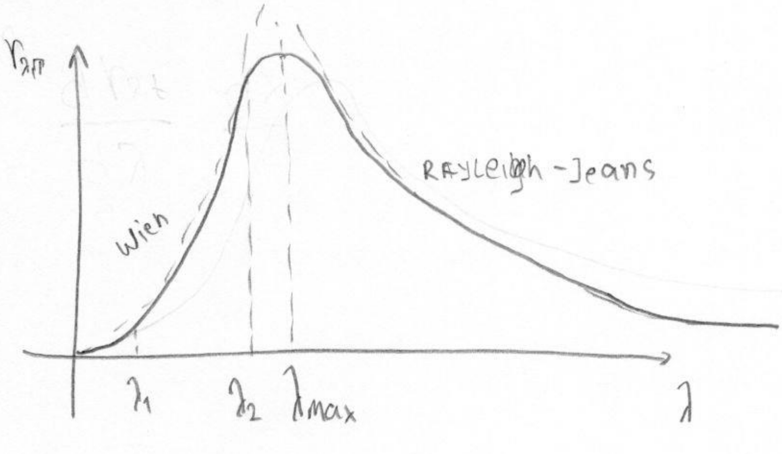
$$P_{\lambda_1 - \lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} r_{\lambda T}\, d\lambda$$

б) $\lambda_{max} \cdot T = b$ – Виенов закон померања

$$b = \frac{hc}{5k} = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ mK$$

$$\frac{dr_{\lambda T}}{d\lambda} = 0 \quad \dots \quad \lambda_{max} \cdot T = b$$

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = 0{,}75\ \mu m$$



a) $$P = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda$$

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \gg 1$$

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \approx e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$$

$$P = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} d\lambda =$$

$$x = \frac{hc}{\lambda kT} \qquad dx = -\frac{hc}{\lambda^2 kT} d\lambda$$

$$= \frac{2\pi}{h^3 c^2} (kT)^4 \int_{x_1}^{x_2} x^3 e^{-x} dx = \frac{2\pi}{h^3 c^2} (kT)^4 \left[e^{-x} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) \right] \Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$\ldots = 2{,}987 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$$

б)

$$R = \int_0^\infty \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$x = \frac{hc}{\lambda k T} \qquad \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$R = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4 = 1{,}44 \cdot 10^7 \ \frac{W}{m^2}$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \ \frac{W}{m^2 K^4}$$

$$P = R \cdot S$$

S - површина отвора

$$S = r^2 \pi$$

$$P = 1134{,}3 \ W$$

При температури од 4000 K 20% енергије се преноси у видљивом делу спектра c)

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{max}}$$

$$\nu_{max} = 4 \cdot 10^{16}\ Hz$$

Задатак

Израчунати емисиону моћ тела за зрачење таласних дужина већих од 900 nm које је на температури при којој тело емитује максимално зрачење таласне дужине 500 nm. Користити Рејли Џинсову формулу за спектралну моћ

$$r_T = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5}\frac{h}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1} \quad \text{- Планк} \qquad T \uparrow \quad \lambda \uparrow$$

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT}$$

$$R = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\,\frac{J}{\cancel{K}}\cdot 3\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}\cdot \frac{2{,}9\cdot 10^{-3}\,\cancel{Km}}{500\cdot 10^{-9}\,\cancel{m}}}{(900\cdot 10^{-9})^3\, m^3\, 2}$$

$$r_{T\lambda} = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$$

$$R = \dots \frac{J}{s\,m^2}$$

$$R = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}\, d\lambda$$

$$R = 2\pi ckT \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^4}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

ултраљубичаста катастрофа

$$R = 2\pi ckT\left(-\frac{1}{3\lambda^3}\right)\Bigg|_{\lambda_1}^{\infty}$$

$$R = 2\pi ckT\left(\frac{1}{3\lambda_1} - \cancel{\frac{1}{\infty}}^{\to 0}\right)$$

$$R = \frac{2\pi ckT}{3\lambda_1^3}$$

2.41. (Пушић, Збирка зад. из физике) Задатак

Ако се 40% утрошене електричне енергије у сијалици снаге $P_{sij} = 60\,W$ израчи у виду топлоте, израчунати температуру влакна дужине $l = 0{,}2\,m$ и пречника $d = 0{,}01\,mm$. Зрачење влакна сијалице посматрати као апсолутно црно тело

Решење:

Емисиона моћ: $R_T = \sigma T^4$

$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

$S = d \pi l$

$S = \pi l d$

$P = S \cdot R_T = S \sigma T^4$

$\eta = 40\%$ у виду топлоте

$T = \sqrt[4]{\frac{\eta P_{sij}}{\pi \sigma l \cdot d}}$

$P = \eta P_{sij} = S \sigma T^4$

$T = \sqrt[4]{\frac{\eta P_{sij}}{\sigma S}}$

$T = \sqrt[4]{\frac{0{,}4 \cdot 60\,W}{\pi \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \cdot 10^{-5}\,m \cdot 0{,}2\,m}}$

$T = 2865\,K$

(Пукић, Збирка задатака из физике) Задатак

2.47. За колико се смањи маса Сунца током једне године као последица зрачења? Сматрајући зрачење Сунца константним, наћи време за које ће се његова маса преполовити. Зрачење Сунца посматрати као зрачење црног тела. Маса Сунца је $M_s = 1,97 \cdot 10^{30}$ kg, полупречник $R_s = 6,95 \cdot 10^8$ m и температура $T_s = 5800$ K.

Решење:

Емисиона моћ Сунца:

$$R = \sigma T_s^4$$

$$R = \frac{P}{S}$$

$$\frac{P}{S} = \sigma T_s^4$$

$$P = S \sigma T_s^4$$

$$S = 4\pi R_s^2$$

$$P = 4\pi R_s^2 T_s^4$$

$$\frac{\Delta Q}{t} = 4\pi R_s^2 T_s^4$$

$$\Delta Q = 4\pi R_s^2 T_s^4 t$$

$$t = 1 \text{ god} -$$

$$\Delta Q = \Delta m c^2$$

$$\Delta m = \frac{\Delta Q}{c^2}$$

$$\Delta m = 1,367 \cdot 10^{17} \text{ kg}$$

$$\Delta m c^2 = 4\pi R_s^2 T_s^4 t$$

$$\Delta m = \frac{M_s}{2}$$

$$t = \frac{M_s c^2}{8\pi R_s^2 T_s^4}$$

$$t = 7,036 \cdot 10^{12} \text{ god.}$$

Наћи енергију зрачења која са сунца пада на земљу у јединици времена ако сунце зрачи као апсолутно црно тело.

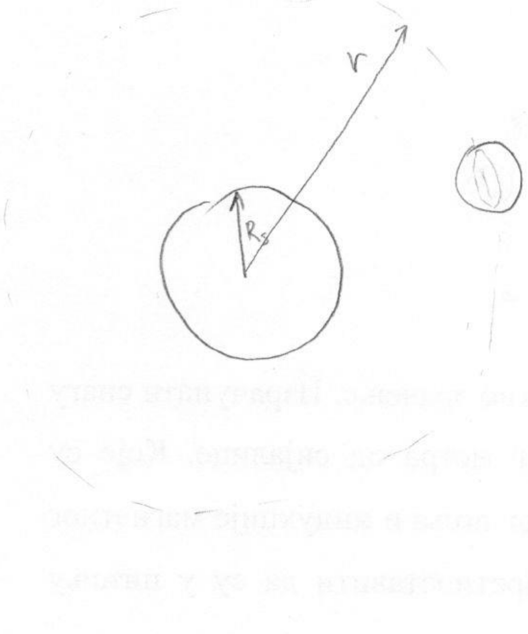
- Полупречник сунца је $6{,}95 \cdot 10^{8}$ m
- Полупречник Земље је 6400 km
- Растојање сунца од Земље је $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m
- Температура сунца је 6000 K

$R_S = 6{,}95 \cdot 10^{8}$ m

$R_Z = 6{,}4 \cdot 10^{6}$ m

$r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

$T_S = 6000$ K



$$\frac{E}{t} = P = R_T \cdot S$$

На Земљу падне $\frac{R_z^2 \pi}{4\pi r^2}$ део енергије са Сунца

$$P_z = R_T \cdot S \cdot \frac{R_z^2 \pi}{4\pi r^2}$$

$$R_T = \sigma T^4$$

$$S = 4\pi R_s^2$$

$$P_z = \sigma T_4 \cdot \cancel{4}\pi R_s^2 \cdot \frac{R_z^2}{\cancel{4} r^2}$$

$$P_z = \sigma T_4 \frac{\pi R_s^2 R_z^2}{r^2}$$

$$P_z = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{\cancel{m^2} K^4} \cdot \frac{3{,}14 \cdot 48{,}3 \cdot 10^{16} \cancel{m^2} \cdot 40{,}96 \cdot 10^{12} m^2}{2{,}25 \cdot 10^{22} \cancel{m^2}} \cdot 1296 \cdot 10^{12} K^4$$

$$P_z = 20{,}28 \cdot 10^{16} \cdot 10^{10}$$

$$P_z = 2{,}03 \cdot 10^{17}\ W$$

Израчунајмо средњу енергију Сунца по m^2 Земљине површине

$$\frac{P_z}{S} = \frac{P_z}{\frac{4\pi R_z^2}{2}} = \frac{P_z}{2\pi R_z^2}$$

$$\frac{P_z}{S} = \frac{2{,}03 \cdot 10^{17}\ W}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 40{,}96 \cdot 10^{12}\ m^2}$$

$$\frac{P_z}{S} = 7{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{5}\ \frac{W}{m^2}$$

$$\frac{P_z}{S} = 7{,}8 \cdot 10^{2}\ \frac{W}{m^2}$$

$$\frac{P_z}{S} \approx 800\ \frac{W}{m^2}$$

Задатак

Полазећи од Планковог закона зрачења апсолутно црног тела одредити Штефан-Болцманову константу

$$R_T = \sigma T^4$$

$$R_T = \int_\nu r_{\nu,T}\, d\nu = \int_\lambda r_{\lambda,T}\, d\lambda$$

Планков закон зрачења

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

$$|r_{\lambda,T}\, d\lambda| = |r_{\nu,T}\, d\nu|$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$d\lambda = -\frac{c}{\nu^2}$$

$$|r_{\nu,T}\, d\nu| = \frac{2\pi h c^2}{\frac{c^5}{\nu^5}} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \frac{c}{\nu^2}\, d\nu$$

$$r_{\nu,T}\, d\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\, d\nu$$

$$R_T = \int_\nu r_{\nu,T}\, d\nu$$

$$R_T = \int_0^\infty \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\, d\nu$$

$$R_T = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\, d\nu$$

$$\frac{h\nu}{kT} = x \Rightarrow \nu = \frac{kT}{h} x$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \infty$$

$$\frac{h}{kT} d\nu = dx \Rightarrow d\nu = \frac{kT}{h} dx$$

$$R_T = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\frac{k^3T^3}{h^3} x^3}{e^x - 1} \frac{kT}{h}\, dx$$

$$R_T = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{k^4T^4}{h^4} \int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1}$$

$$R_T = 2\pi \frac{k^4T^4}{h^3c^2} \int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x(1-e^{-x})}$$

$$R_T = 2\pi \frac{k^4T^4}{h^3c^2} \int \frac{x^3 e^{-x}\, dx}{1-e^{-x}}$$

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

$$R_T = 2\pi \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} x^3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx$$

$$R_T = 2\pi \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx} dx$$

$$R_T = 2\pi \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx}_{I}$$

$$I = \int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx$$

$x^3 = u$ $\quad$ $e^{-nx}dx = dv$

$3x^2 dx = du$ $\quad$ $\int e^{-nx}dx = v$

$$-\frac{1}{n}\int e^{-nx} d(-nx) = v$$

$$-\frac{1}{n} e^{-nx} = v$$

$$I = -x^3 \frac{1}{n} e^{-nx}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) e^{-nx} 3x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{n} x^3 e^{-nx}\Big|_{\infty}^{0} + \frac{3}{n}\int_0^{\infty} x^2 e^{-nx} dx =$$

$$= \cancel{\frac{1}{n} 0 \cdot e^{0}} - \cancel{\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{n e^{nx}}} + \frac{3}{n}\int_0^{\infty} x^2 e^{-nx} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$f'(x) = -(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = -2(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = -6(1-x)^{-4}(-1) = 6(1-x)^{-4}$$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = 2$

$f'''(0) = 6$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{6x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$$

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = e^{-x}(1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots)$$

$$= e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

$u = x^2 \qquad e^{-nx}dx = dv$

$2x\,dx = du \qquad \int -\frac{1}{n} e^{-nx} d(-nx) = \int dv$

$-\frac{1}{n} e^{-nx} = v$

$$I = \frac{3}{n}\left[x^2\left(-\frac{1}{n}\right)e^{-nx}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{n}\right)e^{-nx}\cdot 2x\,dx \right]$$

$$I = \frac{3}{n}\left[-\frac{x^2}{n}e^{-nx}\Big|_0^\infty + \frac{2}{n}\int_0^\infty x e^{-nx}dx \right]$$

$$I = \frac{3}{n}\left[-\frac{1}{n}\cancel{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{nx}}}^{\to 0} + \cancel{\frac{0}{n}\cdot e^0}^{\to 0} + \frac{2}{n}\int_0^\infty x e^{-nx}dx \right]$$

$$I = \frac{6}{n^2}\int_0^\infty x e^{-nx}dx$$

$x = u \qquad e^{-nx}dx = dv$

$dx = du \qquad -\frac{1}{n}e^{-nx} = v$

$$I = \frac{6}{n^2}\left[-x\frac{1}{n}e^{-nx}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{n}e^{-nx}dx \right]$$

$$I = \frac{6}{n^2}\left[-\frac{1}{n}\cancel{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{nx}}}^{\to 0} + \cancel{\frac{0}{n}\cdot e^0}^{\to 0} + \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-nx}dx \right]$$

$$I = \frac{6}{n^3}\int_0^\infty e^{-nx}dx$$

$$I = \frac{6}{n^3}\left(-\frac{1}{n}\right)\int_0^\infty e^{-nx}d(-nx) = -\frac{6}{n^4}\, e^{-nx}\Big|_0^\infty =$$

$$= -\frac{6}{n^4}\left[\cancel{e^{-\infty}}^{\to 0} - \cancel{e^0}^{\to 1} \right] = \frac{6}{n^4}$$

$$R_T = 2\pi \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \sum_{n=1} \frac{6}{n^4}$$

$$R_T = 2\pi \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \, 6 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$$

Риманова зета функција

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$R_T = 2\pi \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \, 6 \cdot \frac{\pi^4}{90}$$

$$R_T = 2\pi \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \, \frac{\pi^4}{15}$$

$$R_T = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} T^4$$

Штефан Болцманов закон

$$R_T = \sigma T^4$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$$

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{m^2 kg}{s^2 K}$$

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \frac{m^2 kg}{s}$$

$$c = 3 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot (3{,}14)^5 \cdot \left(1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{m^2 kg}{s^2 K}\right)^4}{15 \cdot \left(6{,}62 \cdot 10^{-34} \frac{m^2 kg}{s}\right)^3 \cdot \left(3 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}\right)^2}$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot 305{,}25 \cdot 3{,}63 \cdot 10^{-92}}{15 \cdot 290{,}11 \cdot 10^{-102} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \quad \frac{\frac{m^8 kg^4}{s^8 K^4}}{\frac{m^6 kg^3}{s^3} \frac{m^2}{s^2}}$$

$$\sigma = 0{,}0565 \cdot 10^{-6} \quad \frac{\cancel{m^8}^{2}\, \cancel{kg^4} \cdot \cancel{s^5}}{\cancel{s^8}^{3} K^4\, \cancel{m^6}\, \cancel{kg^3}\, m^2}$$

$$\sigma = 5{,}65 \cdot 10^{-8} \quad \frac{\overbrace{kg \frac{m}{s^2}}^{N} \cdot m}{s K^4 m^2}$$

$$\sigma = 5{,}65 \cdot 10^{-8} \quad \frac{N \cdot m}{s K^4 m^2}$$

$$\sigma = 5{,}65 \cdot 10^{-8} \quad \frac{J}{s K^4 m^2}$$

$$\sigma = 5{,}65 \cdot 10^{-8} \quad \frac{W}{m^2 K^4}$$

1. Показати од Планковог закона наћи Винов закон померања

Задатак

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}$$

$$\frac{dr_{\lambda,T}}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{dr_{\lambda,T}}{d\lambda} = 2\pi hc^2\,\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^{-5}\,\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\right) =$$

$$= 2\pi hc^2\left(-5\lambda^{-6}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1} + \lambda^{-5}\cdot\frac{d}{d\lambda}\left[\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1\right)^{-1}\right]\right)$$

$$= 2\pi hc^2\left[-5\lambda^{-6}\,\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1} + \lambda^{-5}(-1)\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1\right)^{-2}\cdot\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1\right)'\right]$$

$$= 2\pi hc^2\left[-5\lambda^{-6}\,\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1} - \lambda^{-5}\,\frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1\right)^2}\,e^{\frac{hc}{\lambda kT}}\cdot\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)'\right]$$

$$= 2\pi hc^2\left[-5\lambda^{-6}\,\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1} - \frac{\lambda^{-5}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1\right)^2}\,e^{\frac{hc}{\lambda kT}}\,\frac{hc}{kT}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]$$

$$\frac{dr_{\lambda,T}}{d\lambda} = 0$$

$$-5\lambda^{-6}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}+\frac{hc}{kT}\lambda^{-7}\frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1\right)^2}=0$$

$$\lambda^{-6}\left[-\frac{5}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}+\frac{hc}{kT}\lambda^{-1}\frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1\right)^2}\right]=0$$

$$\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\left[-5+\frac{hc}{kT}\lambda^{-1}\frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\right]=0$$

$$\frac{hc}{kT}\lambda^{-1}\frac{1}{1-e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}}=5$$

$$\frac{1}{\lambda\left(1-e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}\right)}=5\frac{kT}{hc}$$

$$\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}-5=0$$

$$\lambda\left(1-e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}\right)=\frac{hc}{5kT}$$

нумерично решење

$$1-e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}=\frac{1}{5}\frac{hc}{\lambda kT}$$

$$x=4{,}965$$

$$\frac{hc}{\lambda kT}=4{,}965$$

$$\frac{hc}{\lambda kT}=x$$

$$\lambda_{max}=\frac{hc}{x}\frac{1}{kT}=2{,}897\cdot10^{-3}\,\mathrm{mK}$$

$$1-e^{-x}=\frac{x}{5}$$

$$\frac{1-e^{-x}}{x}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{x}{1-e^{-x}}=5$$

Задатак

Колику енергију израчи тело за $t = 1h$, са површине $S = 10\,cm^2$ и при томе емитује зрачење максималне таласне дужине од 500 nm.

$$\lambda_{max} = 500\,nm = 500 \cdot 10^{-9}\,m$$

$$\lambda_{max} = 5 \cdot 10^{-7}\,m$$

$$t = 1h$$

$$S = 10\,cm^2 = 10 \cdot 10^{-4}\,m^2$$

$$S = 10^{-3}\,m^2$$

Винов закон померања

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}}$$

$$T = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,K \cdot \cancel{m}}{5 \cdot 10^{-7}\,\cancel{m}}$$

$$T = 0{,}58 \cdot 10^{4}\,K$$

$$T \approx 6000\,K$$

Емисиона моћ тела се може изразити Штефан-Болцмановим законом

$$R_T = \sigma T^4$$

$$R_T = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cancel{K^4}} \cdot 1296 \cdot 10^{12}\,\cancel{K^4}$$

$$R_T = 7{,}3 \cdot 10^{3} \cdot 10^{4} \frac{W}{m^2}$$

$$R_T = 7{,}3 \cdot 10^{7} \frac{W}{m^2}$$

$$R_T = \frac{P}{S}$$

$$P = \frac{E}{t}$$

$$R_T = \frac{E}{S \cdot t}$$

$$E = R_T \cdot S \cdot t$$

$$E = 7{,}3 \cdot 10^{7} \frac{J}{\cancel{s} \cdot \cancel{m^2}} \cdot 10^{-3}\,\cancel{m^2} \cdot 3600\,\cancel{s}$$

$$E = 26{,}3 \cdot 10^{7}\,J$$

Задатак

Апсолутно црно тело загрејано са температуре $t_1 = 100°C$ до температуре $t_2 = 1000°C$.

а) Колико пута се промени снага емисије са површине тог тела?

б) Колико пута се промени максимална таласна дужина електромагнетног зрачења?

а) Према Штефан-Болцмановом закону емисиона моћ

$$R_T = \sigma T^4$$

σ - Штефан-Болцманова константа

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

$$R_{T_1} = \sigma T_1^4$$

$$R_{T_2} = \sigma T_2^4$$

$$\frac{R_{T_2}}{R_{T_1}} = \frac{\sigma T_2^4}{\sigma T_1^4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4$$

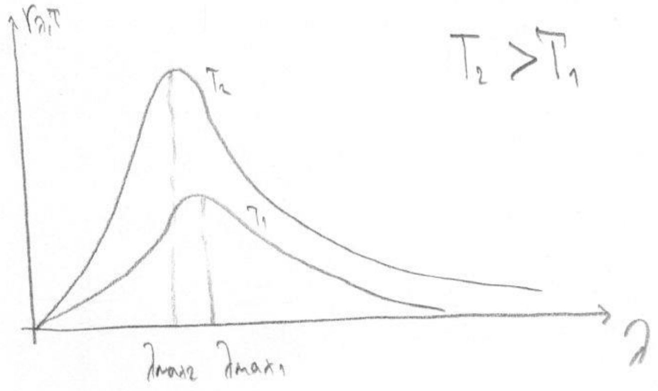
$T_1 = 273 + t_1$ $\quad$ $T_2 = 273 + t_2$

$T_1 = 273 + 100$ $\quad$ $T_2 = 273 + 1000$

$T_1 = 373\,K$ $\quad$ $T_2 = 1273\,K$

$$\frac{R_{T_2}}{R_{T_1}} = \left(\frac{1273}{373}\right)^4 = 135,68$$

б)



$T_2 > T_1$

Винов закон померања

$$T \cdot \lambda_{max} = b$$

$$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \qquad \frac{\lambda_{max2}}{\lambda_{max1}} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{373 \text{ K}}{1273 \text{ K}} = 0,29$$

$$\lambda_{max1} = \frac{b}{T_1}$$

$$\lambda_{max2} = \frac{b}{T_2}$$

Задатак

Емисиона моћ апсолутно црног тела аизноси $5.67\frac{W}{cm^2}$. За колико се процентуално промени температура и емисиона моћ ако се таласна дужина којој одговара максимум енергије зрачења смањи за 10%. Колику притом енергију израчи тело са површине од $1cm^2$ за време од $1h$.

$$R = 5,67 \frac{W}{cm^2}$$

$$R = 5,67 \frac{W}{10^{-4} m^2}$$

$$R = 5,67 \cdot 10^4 \frac{W}{m^2}$$

$$R_T = \sigma T^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{R_T}{\sigma}}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{5,67 \cdot 10^4 \frac{W}{m^2}}{5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}}}$$

$$T = \sqrt[4]{10^{12} K^4}$$

$$T = 10^3 K$$

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} K \cdot m}{10^3 K}$$

$$\lambda_m = 2,9 \cdot 10^{-6} m$$

$$\lambda_m = 2,9 \mu m$$

$$\lambda_m' = \lambda_m - 0,1 \lambda_m$$

$$\lambda_m' = 0,9 \lambda_m$$

$$\lambda_m' = 0,9 \cdot 2,9 \mu m$$

$$\lambda_m' = 2,61 \mu m$$

$$\lambda_m' = \frac{b}{T'}$$

$$T' = \frac{b}{\lambda_m'}$$

$$T' = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} K \cdot m}{2,61 \cdot 10^{-6} m}$$

$$T' = 1,11 \cdot 10^3 K$$

$$\Delta T_{\%} = \frac{T' - T}{T} \cdot 100\%$$

$$\Delta T_{\%} = \frac{1,11 \cdot 10^{3}\,K - 10^{3}\,K}{10^{3}\,K} \cdot 100\%$$

$$\Delta T_{\%} = (1,11 - 1)\,100\%$$

$$\Delta T_{\%} = 11\ \%$$

Повећа се T за 11 %

$$R_T' = \sigma T'^{4}$$

$$R_T' = 5,67 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2K^4} \cdot \left(1,11 \cdot 10^{3}\,K\right)^4$$

$$R_T' = 5,67 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2K^4} \cdot 1,52 \cdot 10^{12}\,K^4$$

$$R_T' = 8,6 \cdot 10^{4}\,\frac{W}{m^2}$$

$$R_T' = 8,6\,\frac{W}{cm^2}$$

$$\Delta R_T\% = \frac{R_P - R_T}{R_T} \cdot 100\%$$

$$\Delta R_T\% = \frac{8{,}6 - 5{,}67}{5{,}67} \cdot 100\%$$

$$\Delta R_T\% \approx 0{,}517 \cdot 100\%$$

$$\Delta R_T\% = 51{,}7\%$$

Укупна емисиона моћ се повећала за 51,7%.

$$E = R_T \cdot S \cdot t$$

$$E = 8{,}6 \frac{W}{cm^2} \cdot 1cm^2 \cdot 3600 s$$

$$E = 8{,}6 \cdot \frac{J}{\cancel{s} \cdot \cancel{cm^2}} \cdot 1\cancel{cm^2} \cdot 3600 \cancel{s}$$

$$E = 30960\ J$$

$$E = 30{,}99\ kJ$$

Задатак

Емисиона моћ апсолутно црног тела износи $5{,}67\ \frac{W}{cm^2}$. На којој таласној дужини је максимална енергија зрачења?

$$R = 5{,}67\ \frac{W}{cm^2}$$

$$R = 5{,}67\ \frac{W}{10^{-4}\,m^2}$$

$$R = 5{,}67 \cdot 10^4\ \frac{W}{m^2}$$

$$R_T = \sigma T^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{R_T}{\sigma}}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{5{,}67\cdot 10^4\ \frac{W}{m^2}}{5{,}67\cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2K^4}}}$$

$$T = \sqrt[4]{10^{12}K^4}$$

$$T = 10^3\ K$$

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{2{,}9\cdot 10^{-3}\ K\cdot m}{10^3\ K}$$

$$\lambda_m = 2{,}9\cdot 10^{-6}\ m$$

$$\lambda_m = 2{,}9\ \mu m$$

Задатак

Приликом хлађења апсолутно црног тела са температуре од 6000 K таласна дужина којој одговара максимум зрачења се промени за $\Delta\lambda = 240\,\mathrm{nm}$. До које се температуре тело охладило?

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

$$\lambda_{max1} = \frac{b}{T_1}$$

$$\lambda_{max2} = \frac{b}{T_2}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$\Delta\lambda = \frac{b}{T_2} - \frac{b}{T_1}$$

$$\Delta\lambda = b\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

$$T_1 = 6000\,\mathrm{K}$$

$$\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} = \frac{\Delta\lambda}{b}$$

$$\frac{1}{T_2} = \frac{\Delta\lambda}{b} + \frac{1}{T_1}$$

$$T_2 = \frac{1}{\frac{\Delta\lambda}{b} + \frac{1}{T_1}}$$

$$T_2 = \left(\frac{240\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{2{,}9\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K\cdot m}} + \frac{1}{6000\,\mathrm{K}}\right)^{-1}$$

$$T_2 = \left(82\cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}} + 0{,}16\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}\right)^{-1}$$

$$T_2 = \left(0{,}082\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}} + 0{,}16\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}\right)^{-1}$$

$$T_2 = 4{,}021\cdot 10^{3}\,\mathrm{K}$$

$$T_2 = 4021\,\mathrm{K}$$

Задатак

Загрејавањем апсолутно црног тела његова температура се повећа на 496 K, а емисиона моћ се повећа 16 пута. Колика је почетна температура апсолутно црног тела?

$$R_{T_1} = \sigma T_1^4 \qquad T_2 = 496\,K$$

$$R_{T_2} = 16 R_{T_1}$$

$$R_{T_2} = \sigma T_2^4$$

$$R_{T_1} = \sigma T_1^4$$

$$R_{T_2} = \sigma T_2^4$$

$$\frac{R_{T_2}}{R_{T_1}} = \frac{T_2^4}{T_1^4}$$

$$\frac{16 \cancel{R_{T_1}}}{\cancel{R_{T_1}}} = \frac{T_2^4}{T_1^4}$$

$$T_1^4 = \frac{T_2^4}{16}$$

$$T_1 = \frac{T_2}{2}$$

$$T_1 = \frac{496\,K}{2}$$

$$T_1 = 248\,K$$

3 Задатак Људско око је најосетљивије за светлост таласне дужине $\lambda = 550\ \mu m$. Колику температуру треба да има апсолутно црно тело да би максимална таласна дужина ел. зрачења била на тој таласној дужини?

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}}$$

$$T = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K}{550 \cdot 10^{-6}\ m} = 0,00527 \cdot 10^{+3}\ K$$

$$T = 5,27\ K$$

$$t = -273 + 5,27$$

$$t = -267,72\ ^{\circ}C$$

Задатак: За колико ће се процентуално променити емисиона моћ ако се температура повећа за 1%?

$$T_2 = T_1 + 0{,}01\,T_1$$

$$T_2 = 1{,}01\;T_1$$

$$R_{T_2} = \sigma T_2^4$$

$$R_{T_1} = \sigma T_1^4$$

$$\frac{R_{T_2}}{R_{T_1}} = \frac{\cancel{\sigma} T_2^4}{\cancel{\sigma} T_1^4}$$

$$\frac{R_{T_2}}{R_{T_1}} = \frac{1{,}01^4\,\cancel{T_1^4}}{\cancel{T_1^4}}$$

$$\frac{R_{T_2}}{R_{T_1}} = 1{,}0406$$

$$R_{T_2} = R_{T_1}\cdot 1{,}04$$

$$R_{T_2} = (1+0{,}04)\,R_{T_1}$$

$$R_{T_2} = R_{T_1} + 0{,}04\,R_{T_1}$$

Емисиона моћ се променила за 4%

Задатак

Ако се температура апсолутно црног тела повећа за 120 K максимална таласна дужина зрачења ће се смањити 1,4 пута. Израчунати температуру тела пре ове промене.

$$T_1 \rightarrow T_2$$

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

$$\lambda_{max1} = \frac{b}{T_1}$$

$$\lambda_{max2} = \frac{b}{T_2}$$

$$\frac{\lambda_{max1}}{\lambda_{max2}} = 1,4$$

$$\frac{\lambda_{max1}}{\lambda_{max2}} = \frac{\frac{b}{T_1}}{\frac{b}{T_2}}$$

$$\frac{\lambda_{max1}}{\lambda_{max2}} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$T_2 = 120\,K + T_1$$

$$\frac{\lambda_{max1}}{\lambda_{max2}} = \frac{120\,K + T_1}{T_1}$$

$$1,4 = \frac{120\,K + T_1}{T_1}$$

$$1,4T_1 = 120\,K + T_1$$

$$1,4T_1 - T_1 = 120\,K$$

$$0,4T_1 = 120\,K$$

$$T_1 = \frac{120}{0,4}\,K$$

$$\boxed{T_1 = 300\,K}$$