- Доплеров ефекат -

1° Релативистички случај

$$\nu_{observer} = \nu_{source}\sqrt{\frac{1+\frac{\vartheta}{c}}{1-\frac{\vartheta}{c}}}$$

$$\nu_0 = \nu_s\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

ϑ - позитивно када се извор и пријемник приближавају

ϑ - негативно када се извор и пријемник удаљавају

2° Класични случај

$$\nu_{observer} = \nu_{source}\left(1 \pm \frac{\vartheta}{c}\right)$$

3.54 Збирка задатака из физике

Задатак

Посматрач се креће брзином v у сусрет равном таласу светлости. Нађите изразе за кружну фреквенцију ω' и таласни вектор k' равног таласа у систему посматрача. Узети да у систему посматрача који мирује равни талас има облик $a = A_0 \cos(\omega t - kx)$ и да важе Лоренцове трансформације за положај и време које види посматрач, који се креће брзином v у односу према другом посматрачу.

Решење:

Посматрач који мирује види равни талас:

$$a(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx)$$

Посматрач који се креће види равни талас исте амплитуде облика:

$$a(x',t') = A_0 \cos(\omega' t' - k' x')$$

$$a(x,t) = a(x',t')$$

$$A_0 \cos(\omega t - kx) = A_0 \cos(\omega' t' - k' x')$$

За посматрача који се креће морамо време и координату трансформисати у његов координатни систем помоћу Лоренцових трансформација

$$x = \frac{x' - \upsilon t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad , \quad t = \frac{t' - \upsilon \frac{x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Заменом:

$$A_0 \cos(\omega t - kx) = A_0 \cos\left[\omega \frac{t' - \upsilon \frac{x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - k \frac{x' - \upsilon t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right] =$$

$$= A_0 \cos\left[\frac{\omega t' - \omega \upsilon \frac{x'}{c^2} - kx' - k\upsilon t'}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}\right] =$$

$$= A_0 \cos\left[\frac{\omega - k\upsilon}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} t' - \frac{k + \upsilon \frac{\omega}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} x'\right]$$

$$\omega' = \frac{\omega + k\upsilon}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad k' = \frac{k + \omega \frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\frac{c}{\nu}} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$$

$$\omega' = \frac{\omega + \frac{v}{c}\omega}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad k' = \frac{k + \omega\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\omega' = \omega\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad k' = \frac{k + kc\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\omega' = \omega\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}\cdot\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}} \qquad k' = k\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}}$$

$$\omega' = \omega\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}\,\cancel{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}\,\cancel{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}} \qquad k' = k\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}\,\cancel{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}\,\cancel{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}}$$

$$\omega' = \omega\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}} \qquad k' = k\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}$$

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \qquad k' = k\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

Фреквенција извора је померена ка вишим фреквенцијама за посматрача који се креће према извору светлости описаном равним таласом и VICE VERSA.

Универзитет у Крагујевцу
Природно-математички факултет
11.06.2014.године

Други колоквијум из предмета
Оптика

1. Разливена мала количина уља на површини воде може формирати врло танки интензивно обојени слој ($n_{vazduh} < n_{ulja} < n_{vode}$). Боја тог слоја зависи од угла под којим се посматра. Светлосни зрак се делимично одбија од горње површине уља, а делимично се прелама и затим одбија од доње површине. На тај начин долази до слагања таласа са извесном разликом оптичке дужине пута.
а) Извести израз за путну разлику.
б) Колика мора бити дебљина слоја да би посматрач видео максимум првог реда за жуту светлост таласне дужине $\lambda = 580nm$, уколико је упадни угао светлости 30^0. Индекс преламања уља је $n = 1.2$

2. Полазећи од Планкове формуле за спектралну емисиону моћ и користећи апроксимацију $e^x \approx 1 + x$ за мале вредности x, извести израз за Рејли-Џинсову спектралну емисиону моћ. Користећи ову апроксимативну формулу, израчунати емисиону моћ небеског објекат који се може сматрати апсолутно црним телом за зрачење таласних дужина већих од $900nm$, ако је таласна дужина која одговара максимуму зрачења измерена на Земљи $555nm$. Који је удео емисионе моћи зрачења преко $900nm$ у односу на укупну емисиону моћ. Небески објекат се удаљава од Земље брзином $0.1c$.

Задатак

$$r_{T,\lambda} = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \frac{h}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1}$$

$$r_{T,\lambda} = \frac{2\pi c k T}{\lambda^4}$$

$$R_{\lambda > 900\,nm} = \int_{\lambda > 900\,nm} \frac{2\pi c k T}{\lambda^4} d\lambda$$

$$= \frac{2\pi c k T}{3\lambda^3_{=900\,nm}}$$

$b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ K \cdot m$

$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

$$\nu_p = \nu_0 \left(1 - \frac{u}{c}\right)$$

$$\nu_p = \nu_0 \left(1 - \frac{0{,}1c}{c}\right)$$

$$\nu_p = \nu_0\ 0{,}9$$

$$\frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{\lambda_0} \cdot 0{,}9$$

$$\frac{1}{\lambda_p} = \frac{1}{\lambda_0} \cdot 0{,}9$$

$$\lambda_0 = 0{,}9\ \lambda_p$$

$$\lambda_0 = 0{,}9 \cdot 555\ nm$$

$$\lambda_0 \approx 500\ nm$$

$$\lambda_0 = \lambda_{max}$$

$$\lambda_{max} T = b$$

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}}$$

$$T = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\ K \cdot m}{500 \cdot 10^{-9}\ m}$$

$$T = 5{,}8 \cdot 10^{3}\ K$$

$$R_{\lambda > 900} = \frac{2\pi c k T}{3 \lambda^3_{900nm}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^{8} \frac{m}{s} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 5{,}8 \cdot 10^{3} K}{3 \cdot (0{,}5)^3 \cdot 10^{-18}\ m^3}$$

$$= 402{,}12 \cdot 10^{6}\ \frac{W}{m^2} \approx 4 \cdot 10^{8}\ \frac{W}{m^2}$$

$$R = \sigma T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2 K^4} \cdot 5{,}8^4\ 10^{12} K^4 = 6416{,}45 \cdot 10^{12} \approx 6{,}4 \cdot 10^{15}\ \frac{W}{m^2}$$

$$\frac{R_{\lambda > 900}}{R} = \frac{4 \cdot 10^{8}}{6{,}4 \cdot 10^{15}} = 0{,}6 \cdot 10^{-7}$$

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$$

$$\Delta = \lambda$$

$$d = \frac{\lambda}{2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$$

$n = 1{,}2$

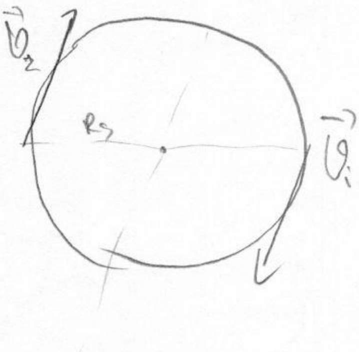
$\alpha = 30°$

$\lambda = 580$ nm

$d \approx 426$ nm $\approx 0{,}4$ μm

Задатак

Услед Доплеровог ефекта и ротације Сунца, светлост емитована са источне и западне стране екватора Сунца померена је ка плавом и црвеном делу спектра респективно. За жуту линију натријума $\lambda = 589$ nm, тај помак између крајева износи 0,0079 nm. На основу ове чињенице и познатог полупречника Сунца $R_s = 6{,}95 \cdot 10^8$ m одредити период ротације Сунца



Услед Доплеровог ефекта:

$$\nu_p = \nu \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\nu_c = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$\Delta\lambda = 0{,}079 \text{ nm}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_c - \lambda_p$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \qquad \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$\nu_p = \frac{c}{\lambda_p} \qquad \frac{c}{\lambda_c} = \frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$\nu_c = \frac{c}{\lambda_c}$$

$$\lambda_p = \lambda\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$\lambda_c = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_c - \lambda_p = \lambda\left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right)$$

$$\Delta\lambda = \lambda\frac{1+\beta-(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta\lambda = \lambda\frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta\lambda\sqrt{1-\beta^2} = 2\lambda\beta \quad \Big|^2$$

$$\Delta\lambda^2(1-\beta^2) = 4\lambda^2\beta^2$$

$$\Delta\lambda^2 - \Delta\lambda^2\beta^2 - 4\lambda^2\beta^2 = 0$$

$$\Delta\lambda^2 - \beta^2\left(\Delta\lambda^2 + 4\lambda^2\right) = 0$$

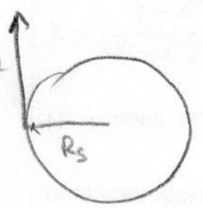
$$\beta^2\left(\Delta\lambda^2 + 4\lambda^2\right) = \Delta\lambda^2$$

$$\beta^2 \lambda^2\left(\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + 4\right) = \Delta\lambda^2$$

$$\beta^2\left(\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + 4\right) = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2$$

$$\beta = \frac{\frac{\Delta\lambda}{\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + 4}}$$

$$v = \frac{c\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + 4}}$$



$$v = \omega R_s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot R_s$$

$$T = \frac{2\pi R_s}{v}$$

$$\Delta\lambda = 0{,}0079\ \text{nm}$$

$$\lambda = 589\ \text{nm}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1{,}34\ 10^{-5}$$

$$v = \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s} \cdot 1{,}34\ 10^{-5}}{\sqrt{\underbrace{(1{,}34)^2\ 10^{-8}}_{0} + 4}}$$

$$v = \frac{3}{2} \cdot 1{,}34\ 10^3\ \frac{m}{s}$$

$$v = 2{,}01 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}$$

$$T = \frac{2\pi R_s}{v}$$

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}95 \cdot 10^8\ m}{2{,}01 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}}$$

$$T = 217 \cdot 10^4\ s$$

$$T = 603{,}1\ h \; = 25\ \text{дана}$$

Класично

$$\nu_p = \nu\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

$$\nu_c = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$\frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{\lambda}\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

$$\frac{c}{\lambda_c} = \frac{c}{\lambda}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$\lambda_p = \frac{\lambda}{1 + \frac{v}{c}}$$

$$\lambda_c = \frac{\lambda}{1 - \frac{v}{c}}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_c - \lambda_p$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{\lambda}{1 + \frac{v}{c}}$$

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{1 + \frac{v}{c} - 1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2\frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 2\frac{v}{c}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} = 2\frac{v}{c}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} - 2\frac{v}{c} = 0 \quad \Big/ \cdot -\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

$$-1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\frac{v}{c} = 0$$

$$\frac{v}{c} = \beta$$

$$\beta^2 + \frac{2\lambda}{\Delta\lambda}\beta - 1 = 0$$

$$\beta_{1/2} = \frac{-\frac{2\lambda}{\Delta\lambda} \pm \sqrt{\frac{4\lambda^2}{\Delta\lambda^2} + 4}}{2}$$

$$\beta_{1/2} = -\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)^2 + 1}$$

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)^2 + 1} - \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

$$v = c\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)^2 + 1} - \frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)$$

$$v = 3\cdot 10^8 \frac{m}{s}\left(\sqrt{\left(\frac{589}{0{,}0079}\right)^2 + 1} - \frac{589}{0{,}0079}\right)$$

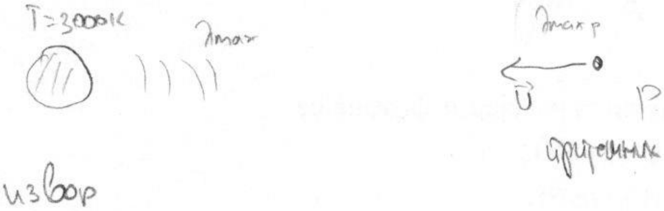
$$v = 2{,}01 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

$$T = \frac{2\pi R_s}{v}$$

$$T = 25 \text{ дана}$$

Задатак

Колика ће бити таласна дужина максималног зрачења за посматрача који се креће брзином $v = 0,1c$ у односу на апсолутно црно тело загрејано до температуре 3000 K?



$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}\,K \cdot m}{3000\,K} = 10^{-6}\,m$$

$$\nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{max}} = \frac{3 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{10^{-6}\,m} = 3 \cdot 10^{14}\,Hz$$

$$\nu_p = \nu_{max}\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

$$\nu_p = 3 \cdot 10^{14}\,Hz\left(1 + \frac{0,1\cancel{c}}{\cancel{c}}\right)$$

$$\nu_p = 3 \cdot 10^{14} \cdot 1,1\,Hz$$

$$\nu_p = 3,3 \cdot 10^{14}\,Hz$$

Задатак

Светлосни објекат емитује зрачење таласне дужине 600nm.

Посматрач на Земљи региструје ту светлост са таласном дужином 500nm

Којом брзином се креће Земља у односу на тај објекат

$$c = \frac{\lambda}{T} \qquad \lambda = 600\ nm = 6 \cdot 10^{-7}\ m$$

$$c = \lambda \cdot \nu \qquad \lambda_p = 500\ nm = 5 \cdot 10^{-7}\ m$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\nu = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}}{6 \cdot 10^{-7}\ m} \qquad \nu_p = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}}{5 \cdot 10^{-7}\ m}$$

$$\nu = 0{,}5 \cdot 10^{15}\ Hz \qquad \nu_p = 0{,}6 \cdot 10^{15}\ Hz$$

$$\nu_p = \nu\left(1 \pm \frac{u}{c}\right) \qquad u = 3 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}\left(\frac{0{,}6 \cdot 10^{15}\ Hz}{0{,}5 \cdot 10^{15}\ Hz} - 1\right)$$

$$\nu_p = \nu\left(1 + \frac{u}{c}\right) \qquad u = 3 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}\left(1{,}2 - 1\right)$$

$$1 + \frac{u}{c} = \frac{\nu_p}{\nu} \qquad u = 0{,}2\ c$$

$$\frac{u}{c} = \frac{\nu_p}{\nu} - 1 \qquad \boxed{u = 0{,}6 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}}$$

$$u = c\left(\frac{\nu_p}{\nu} - 1\right)$$

Задатак

Одредити брзину којом се небески објекат температуре 29000 K удаљава од земље уколико је таласна дужина максимума зрачења измерена на Земљи 158 nm. Колики део енергије зрачења видљивог дела спектра (380 - 750 nm) тело емитује по јединици површине у јединици времена у односу на читав спектар зрачења?

Енергија видљивог дела спектра се за тело на овој температури може израчунати Рејли Џинсовом формулом, а објекат зрачи као АЦТ.

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\ Km}{2{,}9 \cdot 10^{4}\ K} = 1 \cdot 10^{-7}\ m = 100 \cdot 10^{-9}\ m = 100nm$$

$\lambda = 160nm$

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_{max}}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda}$$

$$\frac{v}{c} = 1 - \frac{\lambda_{max}}{\lambda}$$

$$v = 0{,}37\ c$$

$$R_T = \sigma T^4$$

$$R_T = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2K^4} \cdot (29000K)^4$$

$$\cancel{R_T = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{16}} \frac{W}{m^2}$$

$$R_T = 4 \cdot 10^{10} \frac{W}{m^2}$$

$$R_{T,\lambda_1\lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{2\pi c k T}{\lambda^4}\, d\lambda$$

$\lambda_1 = 380,\ \lambda_2 = 750$

$$R_{T,\lambda_1\lambda_2} = 3{,}98 \cdot 10^{9} \frac{W}{m^2}$$

$$\frac{R_{T,\lambda_1\lambda_2}}{R_T} = \frac{3{,}98 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 10^{9}} = 0{,}1$$

10 %

Задатак

Радар емитује зрачење ка покретном објекту фреквенције $0,5 \cdot 10^{15}$ Hz. Колика је брзина објекта ако је разлика у фреквенцијама 50 Hz?

$$\nu = 0,5 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz}$$

$$\Delta\nu = 50\ \mathrm{Hz}$$

$$\Delta\nu = \nu_p - \nu$$

$$\Delta\nu = \nu\left(1 + \frac{v}{c}\right) - \nu$$

$$\cancel{\nu} + \nu\frac{v}{c} - \cancel{\nu} = \Delta\nu$$

$$\nu\frac{v}{c} = \Delta\nu$$

$$v = c\frac{\Delta\nu}{\nu}$$

$$v = \frac{50}{0,5 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz}} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}$$

$$v = 300 \cdot 10^{-7}\ \frac{m}{s}$$

$$v = 3 \cdot 10^{-5}\ \frac{m}{s}$$

Задатак

За колико процената ће се променити таласна дужина зрачења, ако се пријемник креће брзином 0,3c ка извору

$v = 0{,}3c$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot 100\% = ?$

$\nu_p = \nu\left(1 + \frac{v}{c}\right)$

$\nu_p = \nu\left(1 + \frac{0{,}3c}{c}\right)$

$\nu_p = 1{,}3\nu$

$\lambda = \frac{c}{\nu}$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_p - \lambda}{\lambda}$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{c}{\nu_p} - \frac{c}{\nu}}{\frac{c}{\nu}}$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\nu_p} - \frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\nu}}$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\nu - \nu_p}{\nu_p \nu}}{\frac{1}{\nu_p}}$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\cancel{\nu_p}(\nu - \nu_p)}{\cancel{\nu_p} \cdot \nu}$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\nu - \nu_p}{\nu}$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\nu - 1{,}3\nu}{1{,}3\nu}$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{-0{,}3\cancel{\nu}}{1{,}3\cancel{\nu}}$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -0{,}23$

Смањиће се за 23%