Задатак:

Одредити позицију коначног лика и скицирати конструкцију лика од танког, план-конвексног сочива, жижне даљине f у случају када је:

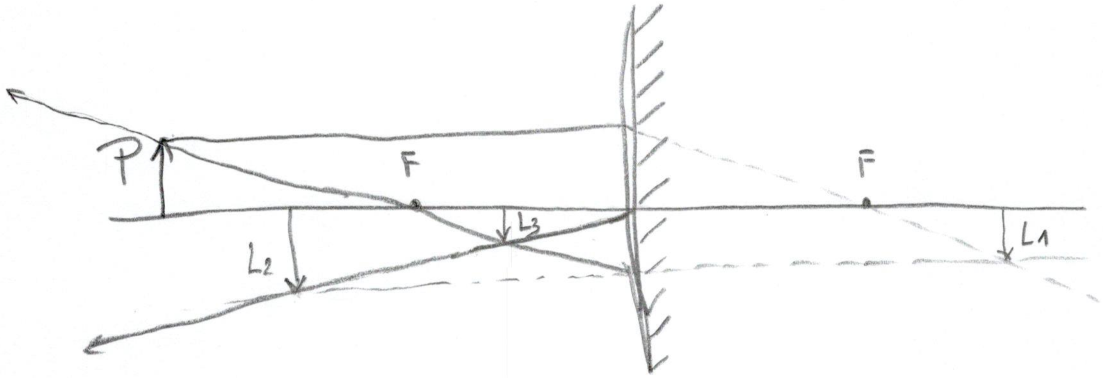
а) Равна страна сочива посребрена и понаша се као огледало.

б) Закривљена страна сочива посребрена и понаша се као огледало

Предмет се налази на оптичкој оси на растојању $2f$ од центра сочива и у оба случаја налази се са непосребрењене стране сочива. Индекс преламања стакла од којег је сочиво направљено износи $n = 1,5$.

Решение:

а)



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l_1}$$

$$l_1 = \frac{pf}{p-f}$$

$$l_1 = \frac{2f \cdot f}{2f - f}$$

$$l_1 = 2f$$

$$l_2 = 2f$$

$$p_3 = l_2$$

$$p_3 = 2f$$

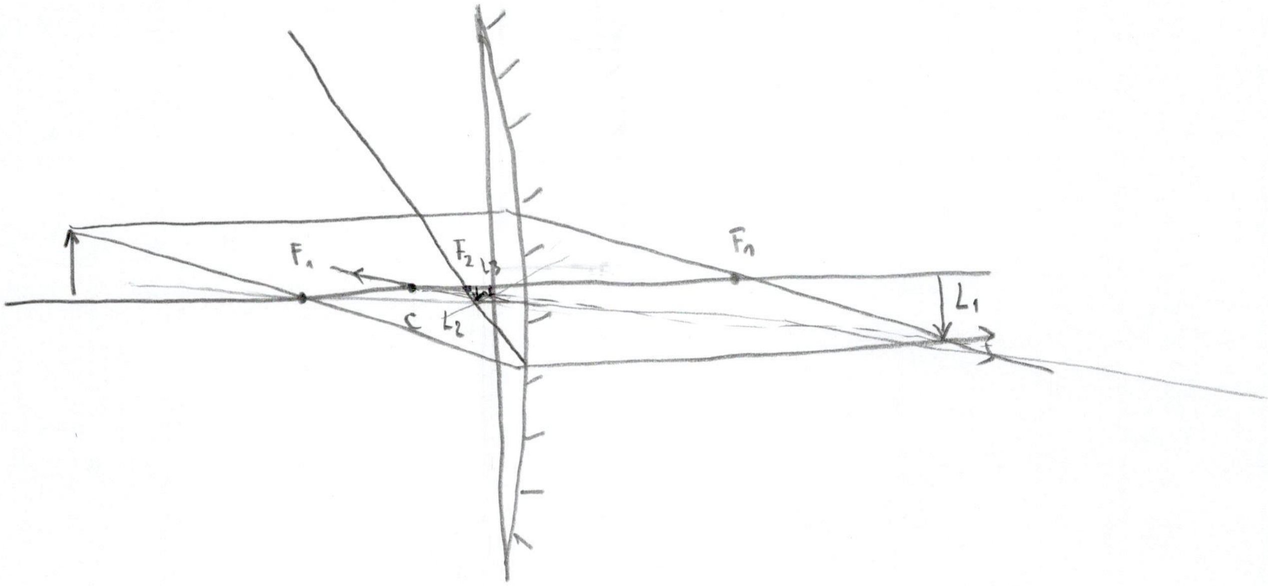
$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{p_3} + \frac{1}{l_3}$$

$$l_3 = \frac{p_3 f}{p_3 + f}$$

$$l_3 = \frac{2f \cdot f}{2f + f}$$

$$l_3 = \frac{2}{3} f$$

б)



Сочиво је жижне даљине f у ваздуху:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\cancel{\frac{1}{R_1}}^{\,0} + \frac{1}{R_2}\right) \quad ; \quad R_2 \equiv R$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}$$

$$R = (n-1)f$$

$$R = (1{,}5-1)f$$

$$R = \frac{f}{2}$$

$$f_2 = \frac{R}{2} = \frac{f}{4}$$

сочиво

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l_1}$$

$$l_1 = \frac{pf}{p-f}$$

$$p = 2f$$

$$l_1 = 2f$$

$$p_2 = l_1$$

огледало

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2}$$

$$l_2 = \frac{p_2 f_2}{p_2 + f_2}$$

$$l_2 = \frac{2}{9} f$$

$$p_3 = \frac{2}{9} f$$

сочиво

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{p_3} + \frac{1}{l_3}$$

$$l_3 = \frac{p_3 f}{p_3 + f}$$

$$l_3 = \frac{2}{11} f$$

Задатак:

Мали светао објекат је постављен 20 cm од првог сочива, у низу од три танка сочива, чије су жижне даљине по реду: 10, 15 и 20 cm. Прва два сочива су на растојању од 30 cm, а друга два на растојању од 20 cm. Одредите позицију финалног лика у односу на последње сочиво и линеарно увећање у односу на оригинални предмет у случају:

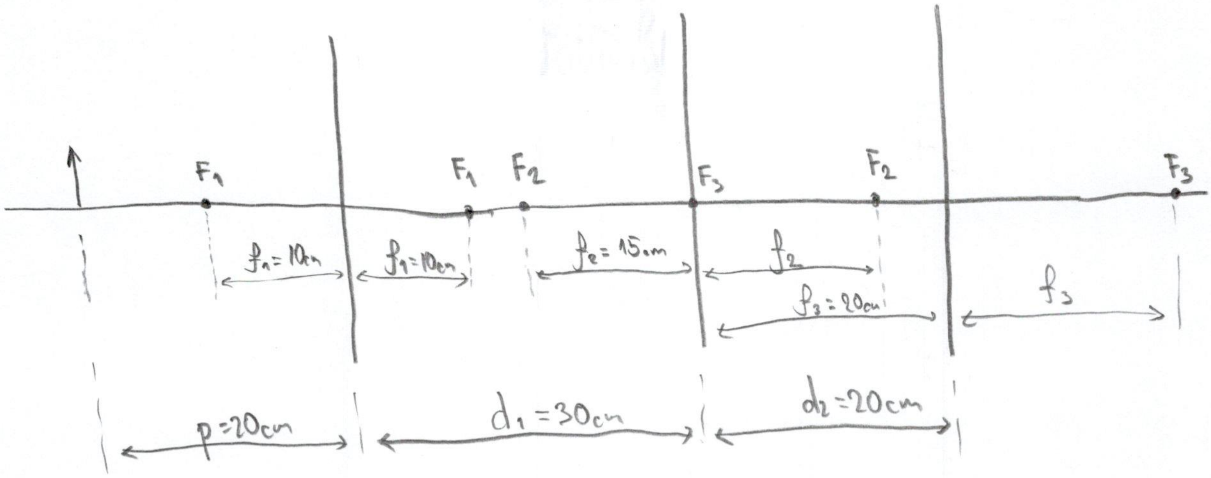
а) када су сва три сочива сабирна,

б) када је средње сочиво расипно, а остала два сабирна, и

в) када су прво и последње сочиво расипна, а средње сабирно.

Скицирати конструкције лика.

Решене:



$p = 20cm$

$f_1 = 10cm$

$f_2 = 15cm$

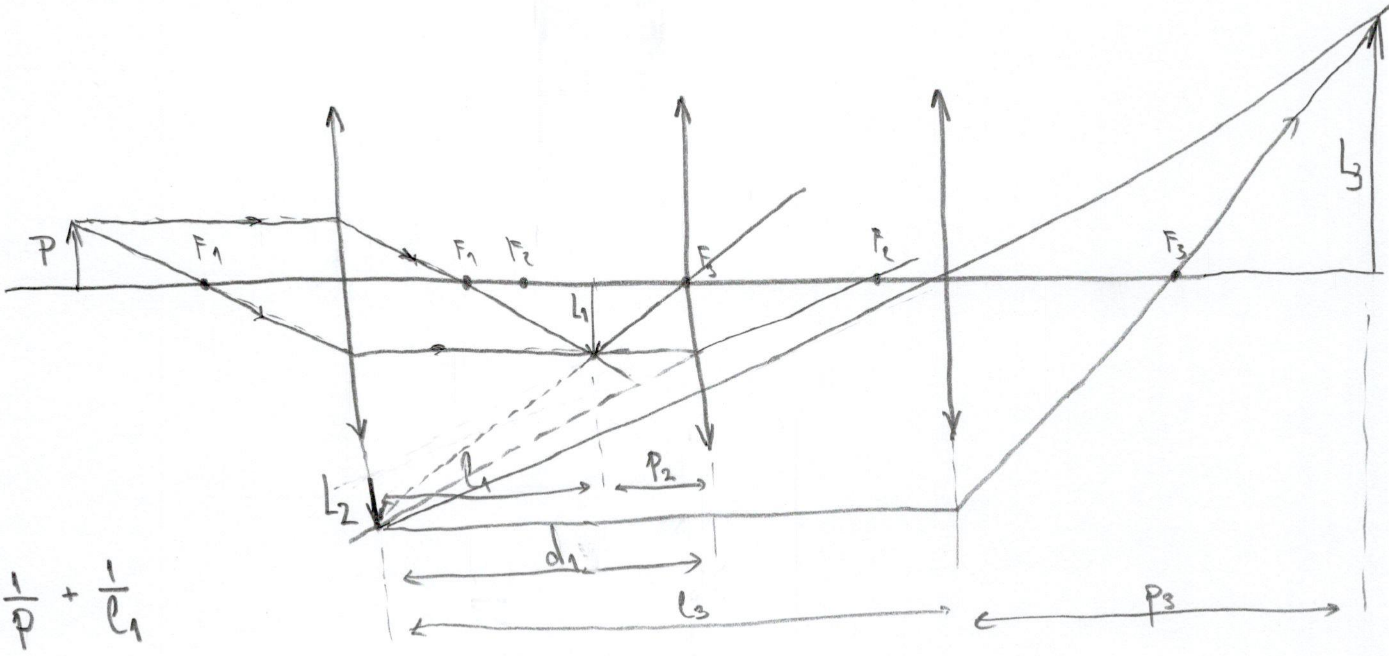
$f_3 = 20cm$

$d_1 = 30cm$

$d_2 = 20cm$

$l_3, V = ?$

a)



$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l_1}$$

$$l_1 = \frac{p \cdot f_1}{p - f_1}$$

$$l_1 = 20\,cm$$

$$p_2 = d_1 - l_1 = 10\,cm$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{l_2}$$

$$l_2 = \frac{f_2\ p_2}{f_2 - p_2} = 30\,cm$$

$$p_3 = d_1 + d_2 = 50\,cm$$

$$\frac{1}{f_3} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{l_3}$$

$$l_3 = \frac{p_3 f_3}{p_3 - f_3} = 33{,}33\,cm$$

$$U = U_1 U_2 U_3$$

$$U_1 = \frac{L_1}{P} = \frac{l_1}{p}$$

$$U_2 = \frac{L_2}{L_1} = \frac{l_2}{p_2}$$

$$U_3 = \frac{L_3}{L_2} = \frac{l_3}{p_3}$$

$$U = \frac{l_1 l_2 l_3}{p\ p_2\ p_3}$$

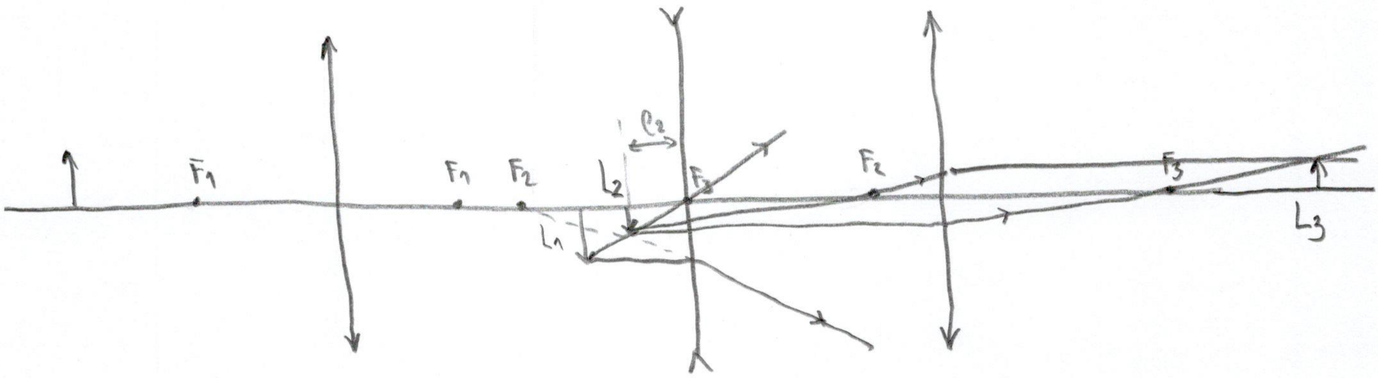
$$U = \frac{\cancel{20\,cm} \cdot 30\,cm \cdot 33{,}33\,cm}{\cancel{20\,cm} \cdot 10\,cm \cdot 50\,cm}$$

$$U = 1{,}99$$

$$U \approx 2$$

б)

као под а



$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l_1}$$

$$\underline{l_1 = 20\,cm}$$

$$p_2 = d_1 - l_1 = 10\,cm$$

$$-\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{l_2}$$

$$\underline{l_2 = \frac{f_2 p_2}{f_2 + p_2} = 6\,cm}$$

$$p_3 = l_2 + d_2 = 26\,cm$$

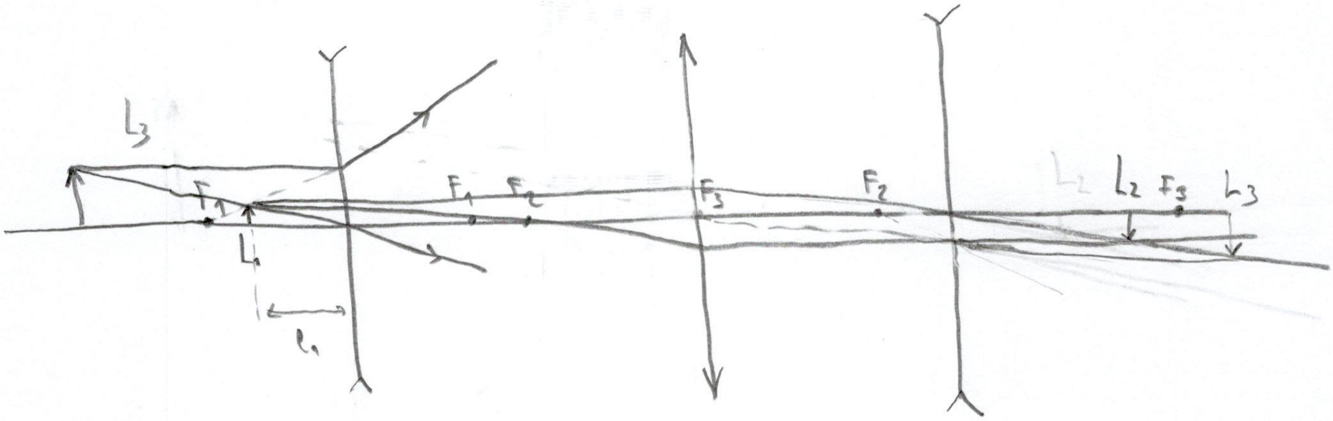
$$\frac{1}{f_3} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{l_3}$$

$$\underline{l_3 = \frac{p_3 f_3}{p_3 - f_3} = 86,6\dot{6}\,cm}$$

$$U = \frac{l_1 l_2 l_3}{p\, p_2\, p_3} = \frac{20 \cdot 6 \cdot 86,6\dot{6}}{20 \cdot 10 \cdot 26}$$

$$U = 2$$

b)



$$-\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l_1}$$

$$l_1 = \frac{p f_1}{p + f_1} = 6{,}6\dot{6}\ \text{cm}$$

$$p_2 = l_1 + d_1 = 36{,}6\dot{6}\ \text{cm}$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2}$$

$$l_2 = \frac{p_2 f_2}{p_2 - f_2}$$

$$l_2 = 25{,}38\ \text{cm}$$

$$p_3 = d_3 - l_2 = 5{,}38\ \text{cm}$$

$$-\frac{1}{f_3} = -\frac{1}{p_3} + \frac{1}{l_3}$$

$$l_3 = \frac{f_3 p_3}{f_3 - p_3} = 7{,}36\ \text{cm}$$

$$V = \frac{l_1 l_2 l_3}{p\, p_2 p_3} = 0{,}315$$

Задатак:

Наћи решење једначине дисперзије ако постоји спољење:

$$m\ddot{r} + g\dot{r} + fr = eE_0 \sin\omega t .$$

Увести параметре $\gamma = \frac{g}{m}$ и $\omega_0^2 = \frac{f}{m}$. Хармониске осцилације принудног осциловања представити у комплексном облику. $(\sin\omega t = e^{i\omega t})$

- После извесног времена осциловања, сопствене осцилације се могу занемарити. У ком облику можемо представити решење у том случају.
- r је фазно померено у односу на E. Изразити r у облику $r = Re^{i(\omega t + \delta)}$ и одредити стварну вредност амплитуде и фазни померај.
- Наћи израз за комплексну диелектричну константу ε, полазећи од комплексне вредности r, и одговарајући комплексни индекс преламања.

Решење:

$$m\ddot{r} + g\dot{r} + fr = eE_0 \sin\omega t$$

$$\ddot{r} + \frac{g}{m}\dot{r} + \frac{f}{m}r = \frac{eE_0}{m}\sin\omega t$$

$$\ddot{r} + \gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{eE_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$r = r_h + r_p$$

$$\ddot{r}_h + \gamma\dot{r}_h + \omega_0^2 r_h = 0$$

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{12} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\lambda_{12} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)}$$

$$\lambda_{12} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_1$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

ω_1 - фреквенција сопствених осцилација амортизујућег e^-

$\omega_1 \approx \omega_0$; $\frac{\gamma^2}{4} << \omega_0^2$

Пример: Разређена пара Na

$\omega_0 = 5\cdot10^{14}\,\mathrm{rad}$; $\gamma = 2{,}5\cdot10^{11}$

$$r_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$r_h = C_1 e^{\left(-\frac{\gamma}{2} + i\omega_1\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{\gamma}{2} - i\omega_1\right)t}$$

$$r_h = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}\right)$$

$$r_p = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

$$\dot{r}_p = i\omega A e^{i\omega t} - i\omega B e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{r}_p = -\omega^2 A e^{i\omega t} - \omega^2 B e^{-i\omega t}$$

$$A\left(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2\right)e^{i\omega t} + B\left(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2\right)e^{-i\omega t} = \frac{eE_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$B = 0$$

$$A\left(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2\right) = \frac{eE_0}{m}$$

$$A = \frac{e}{m}E_0\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$r_p = \frac{e}{m}E_0\frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$r(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}\right] + \frac{e}{m}\frac{E_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

За големо t, $e^{-\frac{\gamma}{2}t} \longrightarrow 0$

$$\boxed{r = \frac{e}{m}\frac{E_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}}$$

$$r = \frac{e}{m}\frac{E_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

$$r = \frac{e}{m}\frac{E_0 e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)$$

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

$$\rho = \sqrt{Re^2 z + Im^2 z}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{Im z}{Re z}$$

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$$tg\varphi = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$r = \frac{e}{m}\frac{E_0 e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\, e^{-i\varphi}$$

$$r = \frac{e}{m}\frac{E_0 e^{i(\omega t - \varphi)}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2\gamma^2}}$$

$$R = \frac{e}{m}\frac{E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}$$

$$tg\delta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$r = R e^{i(\omega t - \delta)}$$

$$D = \varepsilon E$$

$$D = \varepsilon_0 E + 4\pi \varepsilon_0 P$$

$$\varepsilon E = \varepsilon_0 E + 4\pi \varepsilon_0 P$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon_0 E + 4\pi \varepsilon_0 P$$

$$\varepsilon_r = 1 + 4\pi \frac{P}{E}$$

$$\varepsilon_r = 1 + 4\pi \frac{Ner}{E}$$

$$P = Ner_d$$

$$\varepsilon_r = 1 + 4\pi \frac{Ne \frac{e}{m} E_0 \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}}{E_0 e^{i\omega t}}$$

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 + \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}}$$

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$n = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

$$\mu_r \approx 1$$

$$n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

$$n^2 = \varepsilon_r$$

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

$$\cancel{n^2 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma + 4\pi N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}}$$

$$\cancel{n'^2 = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 4\pi N \frac{e^2}{m} + i\omega\gamma\right)\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}}$$

$$\cancel{n'^2 = }$$

$$n'^2 = 1 + \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

Представимо комплексно n' као

$$n' = n(1 - i\kappa)$$

$$n'^2 = n^2(1 - i\kappa)^2$$

$$\varepsilon_r = n^2(1 - 2i\kappa - \kappa^2)$$

$$\varepsilon_r = n^2(1 - \kappa^2) - 2i n^2 \kappa$$

$$n^2(1 - \kappa^2) = 1 + \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$$2n^2\kappa = \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}\omega\gamma}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

У случају да нема амортизација, $\gamma = 0$

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$n = \sqrt{1 + \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$n = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m\omega_0^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

$$n = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^{-1}$$

$$\frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + \dots$$

$$n = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4} + \dots \right)$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

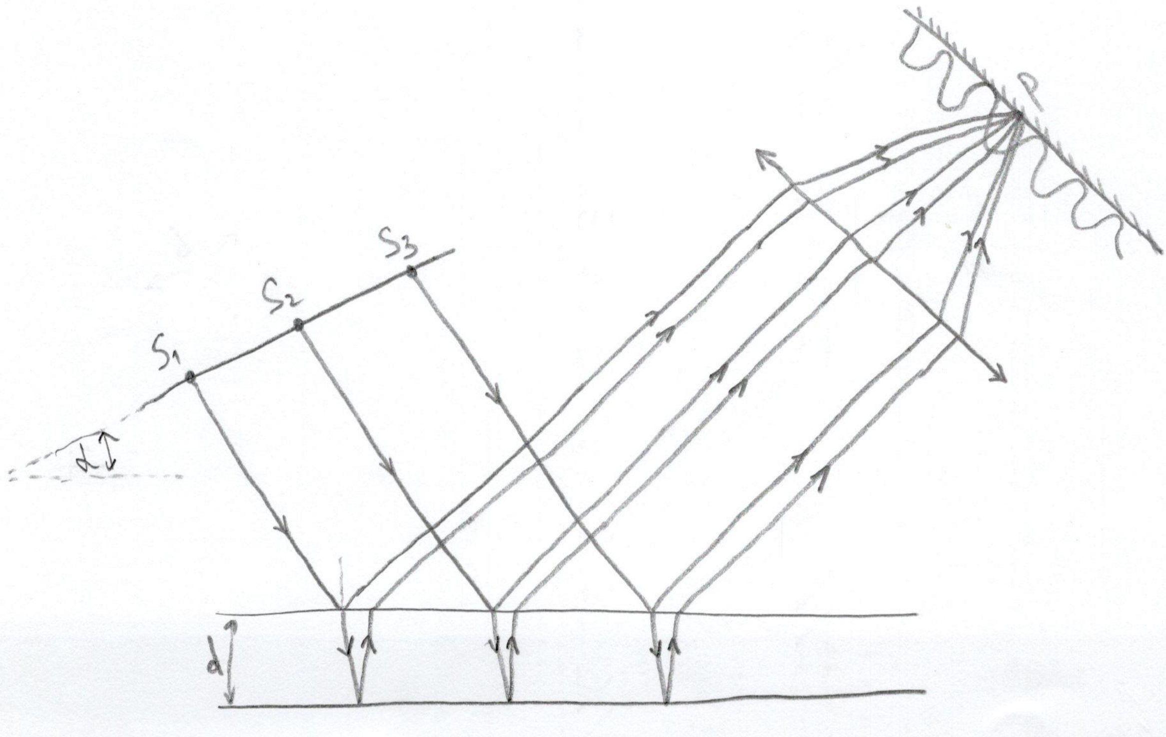
$$n = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m\omega_0^2} \left(1 + \frac{(2\pi c)^2}{\omega_0^2 \lambda^2} + \frac{(2\pi c)^4}{\omega_0^4 \lambda^4} + \dots \right)$$

$$n = \underbrace{1 + \frac{2\pi N^2 e^2}{m\omega_0^2}}_{A} + \underbrace{\frac{2\pi N e^2}{m\omega_0^2} \frac{(2\pi c)^2}{\omega_0^2}}_{B} \frac{1}{\lambda^2} + \underbrace{\frac{2\pi N e^2}{m\omega_0^2} \frac{(2\pi c)^4}{\omega_0^4}}_{C} \frac{1}{\lambda^4} + \dots$$

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$ – Кошијева релација

Задатак

Монохроматска поларизована светлост таласне дужине λ обасјава три прореза која су на великом растојању од танког диелектричног филма дебљине d и индекса преламања n. Прорези постају извори кохерентне светлости, као на слици. Светлост која долази до филма се делом рефлектује од горње површине, а делом прелама. Амплитудни коефицијент рефлексије од горње површине износи r. Диелектрични филм се налази у ваздуху. Узети да се укупан интензитет рефлектоване светлости може представити услед рефлексије светлости са горње површине и прве рефлексије зрака од доње површине (слика) танког филма.



Наћи:

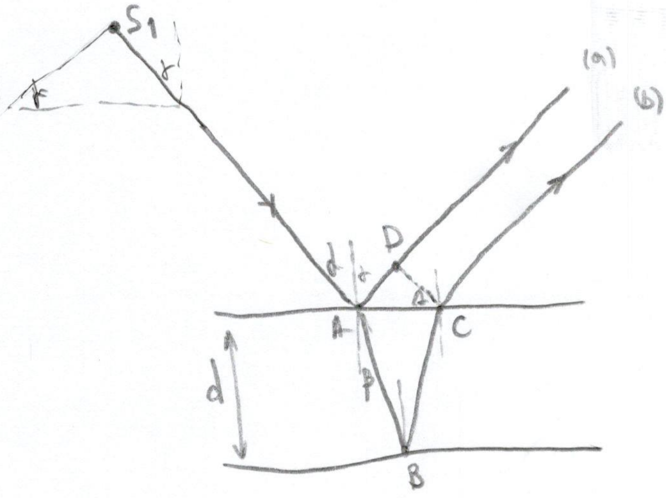
а) путну разлику зрака рефлектованог од горње и доње површине танког филма.

б) релативну расподелу интензитета светлости који настаје услед рефлексије светлости једног извора, од горње и доње површи филма.

в) релативну расподелу интензитета светлости на веома удаљеном екрану услед интерференције рефлектоване светлости од три извора.

Решение:

a)



$$\Delta = 2nd\cos\beta - AD - \frac{\lambda}{2}$$

$$\boxed{\Delta = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\gamma} - \frac{\lambda}{2}}$$

$$\delta = k\Delta$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$$

$$\delta = 2dk\sqrt{n^2-\sin^2\gamma} - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2}$$

$$\delta = \underbrace{2dk\sqrt{n^2-\sin^2\gamma}}_{\delta_{op}} - \underbrace{\pi}_{\delta_a}$$

$$E_{R1} = E_a + E_b$$

$$E_a = rE_0e^{i\omega t}$$

$$E_b = tt'r'E_0e^{i(\omega t-\delta)}$$

$$E_{R1} = rE_0e^{i\omega t} + tt'r'E_0e^{i(\omega t-\delta)}$$

$$tt' = 1-r^2 \quad ; \; r = -r'$$

$$E_{R1} = rE_0e^{i\omega t} - (1-r^2)rE_0e^{i(\omega t-\delta)}$$

$$E_{R1} = rE_0e^{i\omega t}\left[1-(1-r^2)e^{-i\delta}\right]$$

$$E_{R1} = rE_0e^{i\omega t}\left[1-(1-r^2)e^{-i\delta_{op}+i\pi}\right]$$

$$E_{R1} = rE_0e^{i\omega t}\left[1-(1-r^2)e^{-i\delta_{op}}\cdot e^{i\pi}\right]$$

$$E_{R1} = rE_0e^{i\omega t}\left[1+(1-r^2)e^{-i\delta_{op}}\right]$$

$$I_{R1} \sim |E_{R1}|^2$$

$$I_{R1} \sim E_{R1} E_{R1}^{*} = r^2 E_0^2 \left[1 + (1-r^2) e^{-i\delta_{op}}\right]\left[1 + (1-r^2) e^{i\delta_{op}}\right]$$

$$= r^2 E_0^2 \left(1 + (1-r^2) e^{i\delta_{op}} + (1-r^2) e^{-i\delta_{op}} + (1-r^2)^2\right)$$

$$= r^2 E_0^2 \left(1 + (1-r^2)\left(e^{i\delta_{op}} + e^{-i\delta_{op}}\right) + (1-r^2)^2\right)$$

$$= r^2 E_0^2 \left(1 + (1-r^2) \cdot 2\cos\delta_{op} + (1-r^2)^2\right)$$

$$= r^2 E_0^2 \left(1 + (1-r^2)\left(1 + 2\cos\delta_{op} - r^2\right)\right)$$

$$I_{R1} = I_1 \left[r^2 \left(1 + (1-r^2)(2 + 2\cos\delta_{op} - 1 - r^2\right)\right.$$

$$I_{R1} = I_1 \left[r^2 \left(1 + (1-r^2)\left(2(1+\cos\delta_{op}) - (1+r^2)\right)\right)\right]$$

$$I_{R1} = I_1 \left[r^2 \left(1 + (1-r^2)\left(4\cos^2\frac{\delta_{op}}{2} - (1+r^2)\right)\right)\right]$$

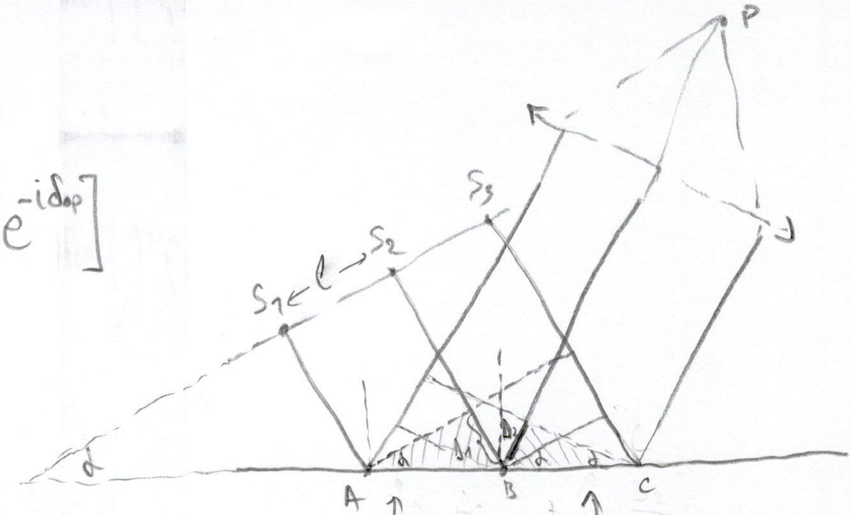
$$I_{R1} = I_1 \left[r^2 \left(1 + 4(1-r^2)\cos^2\frac{\delta_{op}}{2} - (1-r^4)\right)\right]$$

$$I_{R1} = I_1 \left[r^2 \left(\cancel{1} + 4(1-r^2)\cos^2\frac{\delta_{op}}{2} - \cancel{1} + r^4\right)\right]$$

$$I_{R1} = I_1 \left[r^2 \left(r^4 + 4(1-r^2)\cos^2\frac{\delta_{op}}{2}\right.\right]$$

$$I_{R1} = I_1 \left[r^2 \left(r^4 + 4(1-r^2)\cos^2\left(dk\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}\right)\right)\right]$$

b) $E_R = E_{R1} + E_{R2} + E_{R3}$



$$E_{R2} = r E_0 e^{i\omega t}\left[1 + (1-r^2)\, e^{-i\delta_{op}}\right]$$

$$E_{R1} = E_{R1} \cdot e^{+i\delta_1} \cdot e^{-i\delta_2}$$

$$E_{R3} = E_{R1} \cdot e^{-i\delta_1} \cdot e^{+i\delta_2}$$

$\sin\alpha = \dfrac{\Delta_1}{\overline{AB}}$ $\qquad$ $\sin\alpha = \dfrac{\Delta_2}{\overline{BC}}$

$\delta_1 = k\Delta_1$

$\delta_2 = k\Delta_2$

$\overline{AB} = \overline{BC}$

$\Downarrow$

$\Delta_1 = \Delta_2$

$$E_{R1} = E_{R2}\, e^{-i(\delta_2-\delta_1)}$$

$$E_{R2} = E_{R2}$$

$$E_{R3} = E_{R2}\, e^{+i(\delta_2-\delta_1)}$$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta_1}{l}$

$\Delta_1 = \Delta_2 = l \operatorname{tg}\alpha$

$\delta_1 = \delta_2$

$E_{R1} = E_{R2}$

$E_{R2} = E_{R2}$

$E_{R3} = E_{R2}$

$E_R = E_{R1} + E_{R2} + E_{R3}$

$E_R = 3E_{R2}$

$|E_R|^2 = 9|E_{R2}|^2$

$I_R = 9 I_{R2}$

$I_1 = I_2 = I_3 = I_0$

$$I_R = 9 I_0 \left[r^2\left(r^2 + 4(1-r^2)\cos^2\left(dk\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\right)\right)\right]$$

$I_R \sim |E_R|^2$ $\qquad$ I_R неће зависити од l

$I_R \sim 9|E_{R2}|^2$

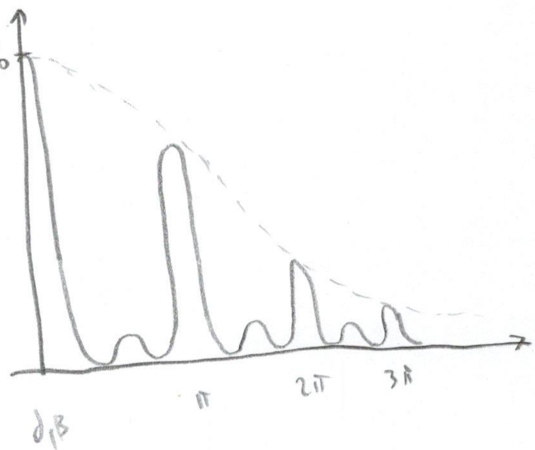
Задатак:

Одредити расподелу интензитета светлости добијеног услед дифракције светлости на три отвора. Растојање између отвора a је три пута веће од ширине отвора b. Скицирати I од $\sin\theta$ и објаснити својства дифракционог шаблона.

Решење:

За N прореза:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$



$\alpha = \frac{1}{2} ka \sin\theta$

$\beta = \frac{1}{2} kb \sin\theta$

$N = 3$

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

Задатак:

Полазећи од Планковог израза за спектралну емисиону моћ,

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1},$$

одредити укупну емисиону моћ АЦТ-а и извести израз за Штефан-Болцманову константу. Користити вредност интеграла:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

Решење:

$$R_T = \int_0^\infty r_{\lambda,T}\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} = 2\pi h c^2 \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \frac{d\lambda}{\lambda^5} = \ldots$$

$$t = \frac{hc}{\lambda kT} \qquad \lambda_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \infty$$

$$\lambda_2 = \infty \Rightarrow t_2 = 0$$

$$dt = -\frac{hc}{kT} \frac{1}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\lambda = \frac{hc}{tkT}$$

$$d\lambda = -\frac{kT}{hc} \lambda^2 dt$$

$$\ldots = 2\pi h c^2 \int_\infty^0 \frac{1}{e^t - 1} \frac{1}{\lambda^5} \left(-\frac{kT}{hc} \lambda^2\right) dt = 2\pi \cancel{h} c^{\cancel{2}} \frac{kT}{\cancel{hc}} \int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1} \frac{1}{\lambda^3} dt =$$

$$= 2\pi c k T \int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1} \frac{1}{\left(\frac{hc}{tkT}\right)^3} dt = 2\pi c k T \int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1} \frac{t^3 k^3 T^3}{h^3 c^3} dt =$$

$$= 2\pi c k T \frac{k^3 T^3}{h^3 c^3} \underbrace{\int_0^\infty \frac{t^3}{e^t - 1} dt}_{\pi^4/15} = 2\pi \cancel{c} k T^4 \frac{k^3}{h^3 c^{\cancel{3}2}} \cdot \frac{\pi^4}{15} =$$

$$= \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4 T^4}{c^2 h^3}$$

$$R_T = \underbrace{\frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c^2 h^3}}_{\sigma} T^4$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{h^3 c^2}$$

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34} J \cdot s$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{1{,}38^4 \cdot 10^{-92} J^{\cancel{4}} K^{-4}}{6{,}62^3 \cdot 10^{-102} \cancel{J^3} s^{\cancel{3}} \cdot 9 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{\cancel{s^2}}}$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{3{,}6267 \cdot 10^{-92} J K^{-4}}{290{,}117 \cdot 9 \cdot 10^{-86} m^2 \cdot s}$$

$$\sigma = \frac{2219{,}683}{39\,165{,}795} \cdot 10^{-6} W m^{-2} K^{-4}$$

$$\sigma = 0{,}05667 \cdot 10^{-6} W m^{-2} K^{-4}$$

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$$

Задатак:

Проценити вредност Доплеровог ширења спектралне линије хелијума таласне дужине $\lambda = 706{,}52\ nm$ у случају када се гас налази на температури $T = 1000\ K$. Средња вредност квадрата брзине молекула гаса је

$$\bar{\vartheta}^2 = \frac{3RT}{M},$$

где је R универзална гасна константа, T је температура у $[K]$, а M је моларна маса.

Решење:

$$\bar{\vartheta}^2 = \frac{3RT}{M} = \frac{3\cdot 8{,}31\ J\ \cancel{mol^{-1}}\ \cancel{K^{-1}}\cdot 10^3\ \cancel{K}}{4\ g\cdot \cancel{mol^{-1}}} = 6{,}2325\ \frac{10^3\ J}{10^{-3}\ kg} = 6{,}2325\cdot 10^6\ \frac{\cancel{kg}\frac{m^2}{s^2}}{\cancel{kg}}$$

$\bar{\vartheta} \approx 2{,}5\cdot 10^3\ \frac{m}{s}$ – класичне брзине

$$\nu = \nu_0\left(1 \pm \frac{\bar{\vartheta}}{c}\right)$$

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\left(1 \pm \frac{\bar{\vartheta}}{c}\right)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1 \pm \frac{\bar{\vartheta}}{c}}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{1 - \frac{\bar{\vartheta}}{c}} - \frac{\lambda_0}{1 + \frac{\bar{\vartheta}}{c}}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0\left(\cancel{1} + \frac{\bar{\vartheta}}{c} - \cancel{1} + \frac{\bar{\vartheta}}{c}\right)}{1 - \underbrace{\left(\frac{\bar{\vartheta}}{c}\right)^2}_{\to 0}} \approx \lambda_0 2\frac{\bar{\vartheta}}{c}$$

$$\Delta\lambda = 2\cdot 706{,}52\ nm\ \frac{2{,}5\cdot 10^3\ \cancel{\frac{m}{s}}}{3\cdot 10^8\ \cancel{\frac{m}{s}}} = 1177{,}53\cdot 10^{-5}\ nm$$

$$\Delta\lambda \approx 0{,}012\ nm$$

Задатак:

Квазар лоциран на ивици видљивог дела свемира емитује светлост која је таласне дужине 4,8 пута веће од таласне дужине истих молекула на Земљи. Уколико је за овај помак одговоран Доплеров ефекат, одредити релативну брзину квазара у односу на Земљу.

Решење:

Релативистички израз за Доплеров ефекат:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Како је $\lambda > \lambda_0 \Rightarrow -\upsilon$ (објекат се удаљава)

$$\Downarrow$$

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$\frac{\cancel{c}}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$\lambda = 4{,}8\,\lambda_0$$

$$\frac{1}{4{,}8\cancel{\lambda_0}} = \frac{1}{\cancel{\lambda_0}}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$1 = 4{,}8\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\Bigg|^2$$

$$1 = 4{,}8^2\,\frac{1-\beta}{1+\beta}$$

$$1+\beta = 4{,}8^2 - 4{,}8^2\beta$$

$$\beta + 4{,}8^2\beta = 4{,}8^2 - 1$$

$$\beta = \frac{4{,}8^2-1}{4{,}8^2+1}$$

$$v \approx 0{,}92\ c$$