

### Glava 3: Integralni zakoni elektrodinamike

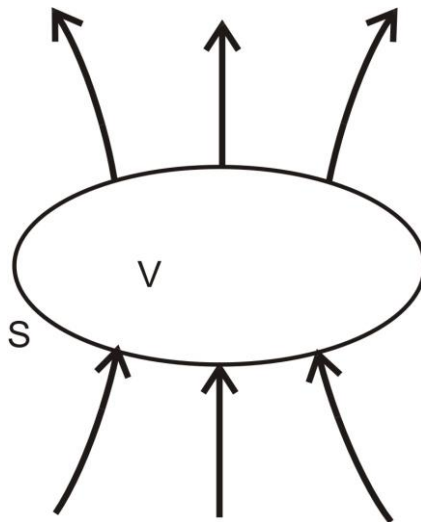
U ovoj glavi su dati osnovni zakoni elektrodinamike u integralnom obliku koji se smatraju postulatima klasične elektrodinamike. Takođe, izložene su osnove elektrostatike i magnetostatike koje su poznate od ranije sa kursa Elektromagnetizma. Razmatra se Kulonov zakon, električno polje i potencijal za diskretan sistem naelektrisanih čestica kao i za kontinuum naelektrisanja. Primenom Dirak-Grinovog identiteta izvodi se Gausova teorema u diferencijalnom obliku. Takođe, razmatra se magnetno polje tačkastog naelektrisanja i stacionarne struje. Izvodi se Bio Savaraov zakon i uvodi vektorski potencijal. U poslednjem poglavlju razmatra se potencijalnost magnetnog polja struje i izvodi Amperova teorema. Na kraju su date jednačine koje određuju magnetostatičko polje.

## 1. Osnovni zakoni elektrodinamike kao postulati

U osnovi elektrodinamike leže izvesni zakoni, koji se ne mogu svesti na prostije i koji su međusobno nezavisni rezultati eksperimentalnog proučavanja električnih i magnetnih pojava. Ovi zakoni čine bazu na kojoj je izgrađena celokupna Maksvel-Lorencova teorija elektromagnetizma, te se smatraju postulatima elektrodinamike.

Bitne pretpostavke klasične elektrodinamike su: *sva materijalna tela u polju su nepokretna*, i da su *dimenzije posmatrane oblasti polja male*, tako da se može smatrati da se dejstvo prenosi trenutno od jedne tačke do druge.

1: Uočimo izvesnu zatvorenu površ  $S$  i označimo sa  $\sum q_i$  ukupno naelektrisanje u unutrašnjosti te površi (Slika 1).



Slika 1. Električni fluks kroz malu zatvorenu površ  $S$ .

Električni fluks kroz ma koju malu zatvorenu površ srazmeran je algebarskom zbiru svih naelektrisanja u oblasti ograničenoj tom površi

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_V q_i, \quad (1)$$

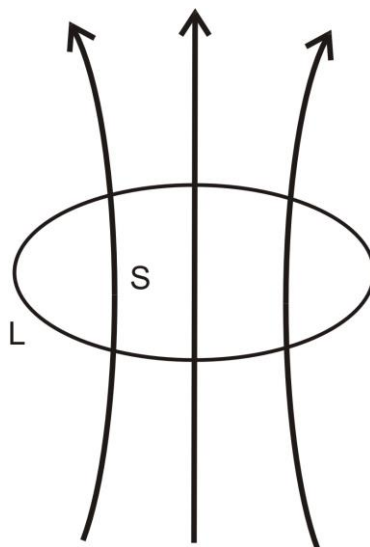
gde je  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  električna konstanta. Ovaj zakon naziva se *Gaussova teorema* i uspostavlja vezu između električnog fluksa kroz neku zatvorenu površ i naelektrisanja unutar te površi.

2: Zamislimo opet izvesnu zatvorenu površ  $S$ , kao i u prethodnom slučaju (Slika 1). Tada je magnetni fluks kroz ovu površ određen zakonom:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2)$$

Magnetni fluks kroz ma koju malu zatvorenu površ uvek je jednak nuli, bez obzira na raspodelu naelektrisanja. Ovaj zakon se zove još *Amperova hipoteza*. Ovaj stav je komplementaran Gaussovoj teoremi.

3: Uočimo izvesnu otvorenu površ  $S$  ovičenu konturom  $L$  (Slika 2).



Slika 2. Elektromotorna sila duž konture.

Ako se menja magnetni fluks kroz ovu površ, elektromotorna sila duž ove konture određena je sledećim zakonom: *Svaka promena magnetnog fluksa kroz ma koju malu otvorenu površ stvara električno polje, pri čemu je elektromotorna sila duž granične konture te površi jednaka negativnoj promeni magnetnog fluksa u jedinici vremena*

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3)$$

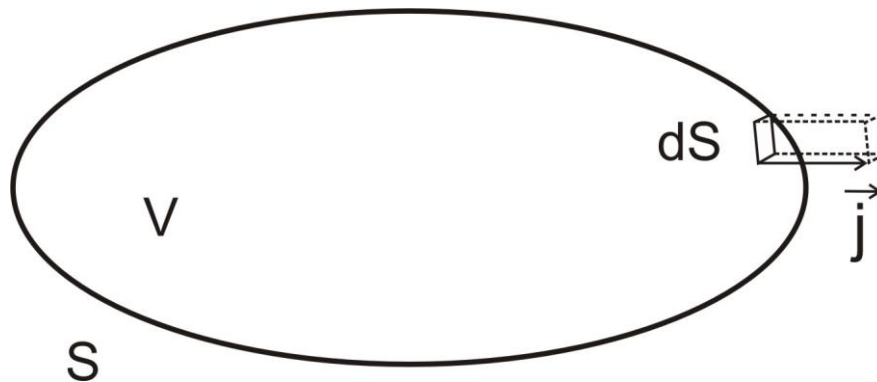
Ovaj zakon naziva se *Faradayev zakon* i daje vezu između magnetnog fluksa kroz neku otvorenu površ i elektromotorne sile duž konture te površi.

4: Zamislimo opet izvesnu otvorenu površ  $S$  ovičenu konturom  $L$ , kao i u prethodnom slučaju (Slika 9). Ako se menja električni fluks kroz ovu površ, magnetomotorna sila duž ove konture određena je sledećim zakonom: *Svaka promena električnog fluksa kroz ma koju malu otvorenu površ stvara magnetno polje, pri čemu je magnetomotorna sila duž granične konture te površi srazmerna promeni električnog fluksa u jedinici vremena*

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (4)$$

gde je  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$  *magnetna konstanta*. Ovaj zakon se naziva *Maxwellov zakon* i daje vezu između električnog fluksa kroz neku otvorenu površ i magnetomotorne sile duž konture te površi. Ovaj stav je komplementaran Faradayevom zakonu indukcije.

5: Uočimo izvesnu oblast zapremine  $V$  ograničenu površi  $S$  (Slika 3).



Slika 3. Zakon održanja naelektrisanja.

Ako se menja naelektrisanje  $q = \int_V \rho dV$  unutar te površi u toku vremena i ako nema nikakvih izvora naelektrisanja u toj oblasti, važi sledeći zakon: *Smanjenje naelektrisanja u nekoj oblasti  $V$  u jedinici vremena jednako je protoku naelektrisanja, tj. jačini struje kroz graničnu površ  $S$  za isto vreme*

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (5)$$

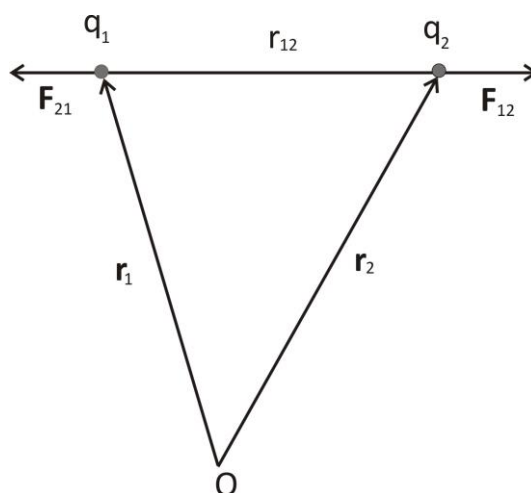
Ovaj zakon izražava *zakon održanja naelektrisanja* u integralnoj formi, i predstavlja jedan od osnovnih zakona fizike.

## 2. Kulonov zakon

Osnovni zakon elektrostatike je Kulonov zakon i on je ustanovljen eksperimentalno. Kulon je ustanovio sile kojima u vakuumu (odnosno u vazduhu – razlika je minimalna) interaguju dve u datom inercijalnom sistemu *nepokretne* naelektrisane čestice koje se nalaze na međusobnom rastojanju  $r$ . Sila interakcije između naelektrisanja  $q_1$  i  $q_2$  u sistemu reference gde oba naelektrisanja miruju proporcionalna je naelektrisanjima, a obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja između njih. Kulonova sila je usmerena duž pravca koji spaja naelektrisanja.

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (6)$$

Konstanta  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{12} \text{ F/m}$  je električna konstanta vakuuma (ili električna propustljivost, dok je  $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ m/F}$ ). Na ovom zakonu uzajamnog dejstva zasnivaju se *električne pojave*.



**Slika 4.** Kulonova interakcija između dva naelektrisanja  $q_1$  i  $q_2$  istog znaka.

Sila kojom naelektrisanje  $q_2$  deluje na naelektrisanje  $q_1$  je  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ . Ovde su  $\mathbf{F}_{12}$  i  $\mathbf{F}_{21}$  sile koje deluju, respektivno, na čestice sa indeksom 2 i 1 usled interakcije sa drugom od tih čestica,  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  su njihovi vektori položaja, a  $q_1$  i  $q_2$  su njihova naelektrisanja. Ukoliko posmatrane naelektrisane čestice interaguju u nekoj drugoj sredini, ogledi pokazuju da je u rezultatu (1) potrebno samo  $\varepsilon_0$  zameniti drugom konstantom  $\varepsilon$  karakterističnom za tu sredinu (tzv. *dielektrična propustljivost sredine*<sup>1</sup>). U toku svojih eksperimenata Kulon je takođe zapazio da za interakciju (1) važi *princip superpozicije sila* (princip nezavisnosti delovanja sila).

Do izraza za Kulonovu silu možemo doći i polazeći od definicione relacije za električno polje. Pošto je električna sila kojom naelektrisanje  $q_1$  deluje na naelektrisanje  $q_2$   $\mathbf{F}_{12} = q_2 \mathbf{E}_1$ , ( $\mathbf{E}_1$  jačina električnog polja koje stvara naelektrisanje  $q_1$  u tački gde se nalazi naelektrisanje  $q_2$ ) nalazimo da ova sila iznosi

$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \mathbf{r}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_0,$$

gde je  $\mathbf{r}_0$  jedinični vektor vektora  $\mathbf{r}_{12}$ . Ova formula određuje Kulonovu silu kojom naelektrisanje  $q_1$  deluje na naelektrisanje  $q_2$  usled njihovog položaja.

Pošto je  $\text{rot}_2 \mathbf{F}_{12} = 0$  zaključujemo da je Kulonova sila konzervativna, tj. sila je negativan gradijent potencijalne energije

$$\mathbf{F}_{12} = -\text{grad}_2 W \equiv -\nabla_2 W. \quad (7)$$

Potencijalna energija interakcije ova dva tačkasta naelektrisanja je

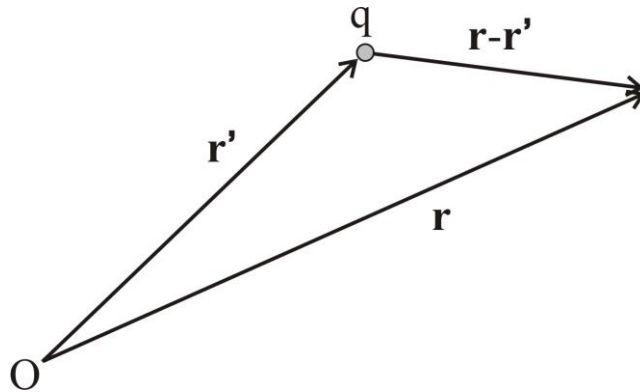
$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (8)$$

<sup>1</sup> Kod svih supstancijalnih sredina je  $\varepsilon > \varepsilon_0$ . Danas je poznato da postoje i sredine kod kojih se mora definisati *tenzor dielektrične propustljivosti*, kao na primer plazma. Napomenimo takođe da se u literaturi za konstantu  $\varepsilon_0$  sreću nazivi *dielektrična propustljivost vakuuma* ili *dielektrična konstanta vakuuma*. Mi ćemo ovu konstantu  $\varepsilon_0$  u ubuduće zvati *električna konstanta vakuuma*.

### 3. Električno polje i potencijal

Prema definiciji, električno polje se određuje preko sile koja deluje na probno naelektrisanje, tj.  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F} / q_p$ . Primenom Kulonovog zakona električno polje u tački  $\mathbf{r}$  tačkastog naelektrisanja  $q$  postavljenog u tački  $\mathbf{r}'$  je

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (9)$$



Slika 5. Električno polje tačkastog naelektrisanja.

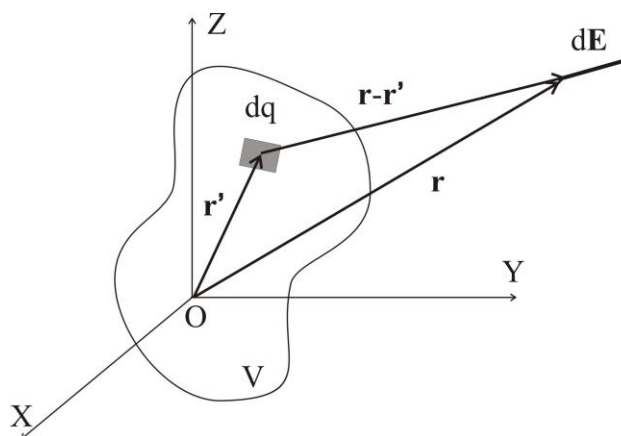
Ako imamo sistem više naelektrisanja  $q_1, q_2, \dots, q_N$  kao izvore polja, ukupno polje je vektorski zbir polja koja potiču od svakog naelektrisanja ponaosob (ovo je princip superpozicije):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_{\alpha}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\alpha})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\alpha}|^3} \quad (10)$$

gde je  $\mathbf{r}_{\alpha}$  vektor položaja naelektrisanja  $\alpha$ .

U slučaju neprekidne raspodele naelektrisanja,  $\rho = \rho(\mathbf{r})$ , električno polje je

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3 r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (11)$$



Slika 6. Elektrostatičko polje  $d\mathbf{E}(\mathbf{r})$  generisano naelektrisanjem  $dq = \rho(\mathbf{r}')d^3 r'$ .

Pošto je  $\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ , možemo uvesti potencijal elektrostatičkog polja  $\phi$  sa

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) . \quad (12)$$

Primenom

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \quad (13)$$

dobijamo da je potencijal elektrostatičkog polja u tački  $\mathbf{r}$  određen sa

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (14)$$

U formuli (13) sa  $\nabla$  je obeležen gradijent po koordinatama vektora  $\mathbf{r}$ . Gradijent po koordinatama vektora  $\mathbf{r}'$  obeležavaćemo sa  $\nabla'$ . Ova notacija se primenjuje generalno za diferencijalne operatore.

Da bismo videli fizički smisao elektrostatičkog potencijala, potražimo rad elektrostatičkog polja pri premeštanju naelektrisanja  $q$  iz tačke A u tačku B u polju

$$A = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -q \int_A^B \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = -q \int_A^B d\phi = q(\phi_A - \phi_B) = -(W_A - W_B) = -\Delta W . \quad (15)$$

Vidimo da je rad jednak negativnoj promeni potencijalne energije naelektrisanja u polju i da ne zavisi od oblika trajektorije. Ako je putanja naelektrisanja zatvorena rad polja je jednak nuli, tj.  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ . Elektrostatičko polje je konzervativno.

Prema tome, u slučaju elektrostatičkog polja, skalarni potencijal  $\phi$  predstavlja rad koji treba izvršiti protiv električnog polja da bi se jedinično naelektrisanje dovelo iz tačke u kojoj je potencijal  $\phi_B$  u tačku u kojoj je potencijal  $\phi_A$ .

#### 4. Gausova teorema u diferencijalnom obliku

U prethodnom poglavlju smo pokazali da je rotor elektrostatičkog polja jednak nuli. Odredimo divergenciju elektrostatičkog polja. Vidimo da je

$$\text{div}\mathbf{E} = -\text{div}\nabla\phi \equiv -\nabla \cdot \nabla\phi = -\Delta\phi . \quad (16)$$

Primenom Dirak-Grinovog identiteta

$$\Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (17)$$

imamo

$$\text{div}\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} . \quad (18)$$

Dakle,

$$\text{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) . \quad (19)$$

Relacija (19) je Gausova teorema u lokalnom (diferencijalnom) obliku. Izvor elektrostatičkog polja je naelektrisanje. Integralni oblik Gausove teoreme se dobija integracijom jednačine (19) po zapremini

$$\int_V d^3r \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad (20)$$

odnosno

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) . \quad (21)$$

Ovde je  $\partial V$  zatvorena površ koja ograničava zapreminu  $V$ . Fluks elektrostatičkog polja kroz ma koju zatvorenu površ jednak je ukupnom naelektrisanju koje se nalazi u zapremini čija je granica ta površ podeljenom sa  $\epsilon_0$ . To je Gausova teorema u integralnom obliku.

Iz jednačine (19) vidimo da potencijal zadovoljava jednačinu

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) . \quad (22)$$

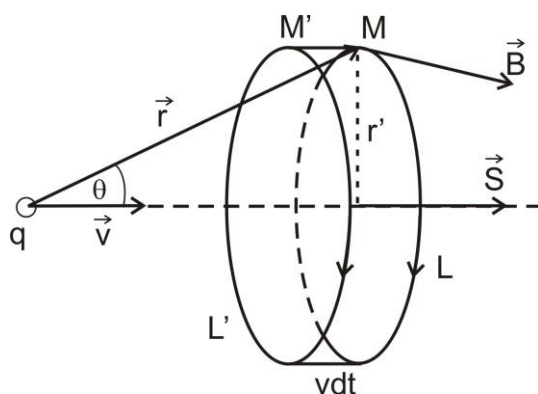
Ova jednačina se naziva Poasonova (Poisson) jednačina.

Jednačine koje kopletno određuju elektrostatičko polje su

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} . \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

## 5. Magnetno polje tačkastog naelektrisanja

Razmotrimo sada magnetno polje koje stvara oko sebe tačkasto naelektrisanje  $q$  koje se kreće brzinom  $\mathbf{v}$  (Slika 7).



**Slika 7.** Magnetno polje generisano tačkastim naelektrisanjem  $q$  koje se kreće brzinom  $\mathbf{v}$ .

Ovaj zadatak se može rešiti primenom *Maksvelovog zakona*. Električno polje naelektrisanja pomera se kroz prostor zajedno sa samim naelektrisanjem, što izaziva *menjanje jačine električnog polja* u ma kojoj tački M. Ovo menjanje električnog polja izaziva *stvaranje magnetnog polja* čije



linije sile obavijaju električne, pri čemu je magnetomotorna sila nastalog magnetnog polja po ma kojoj konturi određena navedenim Maksvelovim zakonom.

Uočimo jednu električnu liniju sile koja ima pravac kretanja naelektrisanja i onu magnetnu liniju sile koja prolazi kroz uočenu tačku M i obavija navedenu električnu liniju sile. Zbog aksijalne simetrije ova magnetna linija sile mora biti kružna sa centrom na pravcu kretanja posmatranog naelektrisanja. Stoga, ako za konturu L izaberemo navedenu magnetnu liniju sile i orijentišemo je kao na slici, imamo

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \pm \oint_L B dl = \pm B \oint_L dl = \pm B \cdot 2\pi r',$$

gde od dva znaka treba uzeti samo onaj koji odgovara orijentaciji vektora  $\mathbf{B}$ , koja se određuje na sledeći način. Prema izabranoj orijentaciji konture L površ S je orijentisana nadesno, te je ugao između vektora  $\mathbf{E}$  i  $d\mathbf{S}$  oštar. Stoga je električni fluks kroz površ S pozitivan, a zbog približavanja naelektrisanja i promena ovog fluksa po jedinici vremena biće pozitivna, pa prema Maksvelovom zakonu i magnetomotorna sila mora biti pozitivna. Iz tog razloga zaključujemo da vektor  $\mathbf{B}$  duž konture L ima isti smer kao i vektor  $d\mathbf{l}$ , kao što je i prikazano na slici, te u poslednjem obrascu treba uzeti znak +.

Sagalsno sa oznakama na Slici 4, imamo da je  $r' = r \sin \theta$  pa dobijamo

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi B r \sin \theta. \quad (24)$$

Sledeći korak je da se izračuna elementarna promena električnog fluksa za vreme  $dt$ . U tom vremenskom intervalu naelektrisanje  $q$  se pomeri za  $v dt$  i pri tome električni fluks kroz ma koju površ oivičenu konturom  $L$  poraste. Ovaj novi električni fluks isti je kao električni fluks koji bi odgovarao prvobitnom položaju naelektrisanja  $q$ , a novom položaju  $L'$  posmatrane konture, koji je za  $v dt$  bliži naelektrisanju.

Uočimo cilindar poluprečnika  $r'$  i visine  $v dt$ , čije su osnove površi ograničene konturom  $L'$  i  $L$ , tada je odgovarajuća promena električnog fluksa jednaka električnom fluxu kroz omotač navedenog cilindra, koji označavamo sa  $\delta S$ . Zamenjujući jačinu električnog polja i imajući u vidu da je ugao između vektora  $\mathbf{E}$  i normale na omotač cilindra  $\pi/2 - \theta$ , dobijamo

$$d\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\delta S} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot dS \cos(\pi/2 - \theta),$$

a pošto se pri integraciji po omotaču ovog cilindra  $r$  i  $\theta$  su približno konstante, biće

$$d\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \sin \theta \int_{\delta S} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \sin \theta \cdot 2\pi r \cdot \sin \theta \cdot v dt$$

odnosno

$$d\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2\epsilon_0 r} q v \sin^2 \theta dt. \quad (25)$$

Na osnovu ovog obrasca Makswellov zakon dobija oblik

$$2\pi B r \sin \theta = \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{2\epsilon_0 r} q v \sin^2 \theta,$$

a otuda

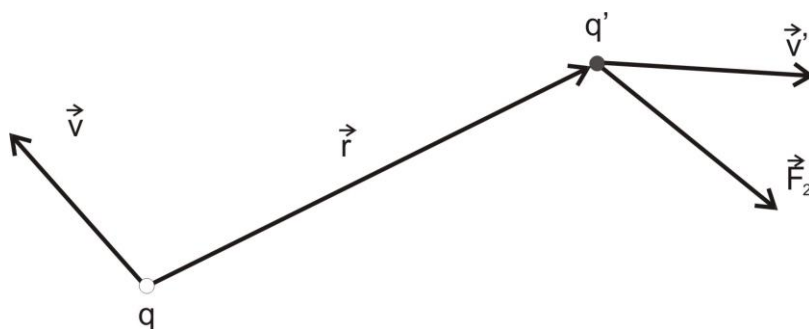
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \theta}{r^2}. \quad (26)$$

Imajući u vidu pravac i smer vektora  $\mathbf{B}$ , prikazan na slici, gornji izraz možemo napisati i u vektorskom obliku

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0}{r^2}. \quad (27)$$

Ovaj obrazac određuje *magnetno polje (magnetnu indukciju) tačkastog naelektrisanja u kretanju u tački M*.

Sada možemo naći silu kojom tačkasto naelektrisanje  $q$  sa brzinom  $\mathbf{v}$  deluje na drugo tačkasto naelektrisanje  $q'$  koje se kreće brzinom  $\mathbf{v}'$  na rastojanju  $r$  (Slika 8).



**Slika 8.** Sila kojom međusobno deluju dva naelektrisanja u kretanju.

Na osnovu izraza  $\mathbf{F}_2 = q'(\mathbf{v}' \times \mathbf{B})$  i obrazca (27) ova sila iznosi

$$\mathbf{F}_2 = q'(\mathbf{v}' \times \mathbf{B}) = q' \mathbf{v}' \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0}{r^2},$$

odnosno

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq' \mathbf{v}' \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0)}{r^2}. \quad (28)$$

Ovaj obrazac određuje dopunsku silu kojom naelektrisanje  $q$  deluje na naelektrisanje  $q'$  usled njihovog kretanja i ovaj zakon se naziva *Amperov zakon*. Na ovom zakonu uzajamnog dejstva zasnivaju se *magnetne pojave*.

Ako hoćemo da dobijemo silu kojom naelektrisanje  $q'$  deluje na naelektrisanje  $q$ , treba u obrascu (23) uzajamno izmeniti  $q, \mathbf{v}$  sa  $q' \mathbf{v}'$  uz istovremenu zamenu  $\mathbf{r}_0$  sa  $-\mathbf{r}_0$

$$\mathbf{F}'_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'q \mathbf{v} \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{r}_0)}{r^2}. \quad (29)$$

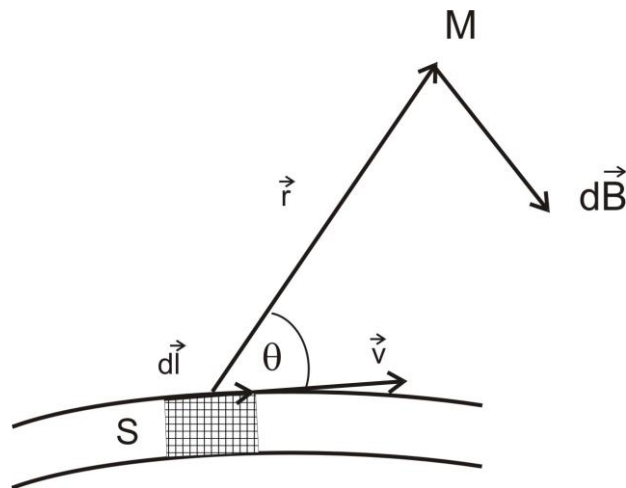
Odavde vidimo da je  $\mathbf{F}'_2 \neq -\mathbf{F}_2$ , tj. za *Amperov zakon uzajamnog dejstva između dva naelektrisanja u kretanju ne važi zakon akcije i reakcije*.

## 6. Magnetno polje stacionarne struje

Činjenica da se oko provodnika sa strujom javlja magnetno polje generisano tom strujom bila je ustanovljena početkom 19. veka u poznatim Erstedovim eksperimentima (Hans Christian Oersted, 1777-1851). Ersted je otkrio da se magnetna igla kompasa postavljena u polju magnetna ponaša na isti način kao i kada je postavimo u polju strujnog provodnika. Iz ovog eksperimenta se zaključuje da naelektrisanja u kretanju generišu magnetno polje baš kao i sam magnet.

Generisano magnetno polje će biti *statičko* ukoliko kroz provodnik protiče električna struja konstantne jačine. Eksperimentalno je utvrđeno da kod ovakvog magnetnog polja važi *princip superpozicije*, pa je pri matematičkom formulisanju rezultata ovih eksperimenata glavna pažnja obraćena na tzv. *linijske strujne elemente*. Oni su definisani proizvodom  $I d\mathbf{l}$ , gde je  $d\mathbf{l}$  linijski element konture kroz koju protiče struja, orijentisan u smeru njenog proticanja, a  $I$  je jačina struje.

Ovde ćemo razmotriti magnetno polje *linijske struje*, tj. struje koja protiče kroz provodnike koji ispunjavaju deo prostora u obliku vrlo uzanih cevi, kao što su na pr. žičani provodnici (Slika 9).



Slika 9. Magnetno polje generisano strujnim elementom  $I d\mathbf{l}$ .

Pretpostavimo da se *stanje kretanja naelektrisanja u provodniku ne menja u toku vremena*, takve struje se nazivaju *stacionarne struje*.

Uočimo element ovog provodnika dužine  $dl$  i preseka  $S$ , pa potražimo jačinu magnetnog polja ovog strujnog elementa. Ako je  $n$  broj elementarnih naelektrisanja  $e$  u jedinici zapremine, u uočenom elementu biće  $n S dl$  elementarnih naelektrisanja, te ona na osnovu (27) stvaraju u tački M magnetno polje jačine

$$d\mathbf{B} = n S dl \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{r}_0}{r^2}. \quad (30)$$

Jačina struje, tj. ukupno naelektrisanje koje prođe kroz presek provodnika  $S$  u jedinici vremena jednako je onom naelektrisanju koje se nalazi u cilindru konstruisanom nad presekom  $S$  i vektorom  $\mathbf{v}$ , gde ima  $n S v$  elementarnih naelektrisanja

$$I = e n S v. \quad (31)$$

Ako konturu provodnika orijentišemo u smeru struje, vektori  $\mathbf{v}$  i  $d\mathbf{l}$  imaju isti pravac i smer, pa će biti:  $n S dl e \mathbf{v} = en S v d\mathbf{l} = I d\mathbf{l}$ , te dobijamo

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2}. \quad (32)$$

Ovaj obrazac određuje jačinu magnetnog polja elementa stacionarne struje  $d\mathbf{l}$  u tački M, a njen intenzitet iznosi,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2}$$

pod pretpostavkom da se ovaj element nalazi u vakuumu. Ovde je  $\mu_0$  magnetna konstanta vakuuma (u SI jedinicama  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ )<sup>2</sup>. Jačina magnetnog polja strujnog elementa zavisi od ugla između vektora  $d\mathbf{l}$  i  $\mathbf{r}$  i normalna je na ovim vektorima, što je bitna karakteristika magnetnog polja struje. Na osnovu principa superpozicije, ukupna jačina magnetnog polja u tački M dobiće se integracijom izraza (32) po konturi linijskog provodnika

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2}. \quad (33)$$

Ovaj rezultat poznat je kao *Bio-Savarov zakon* (Jean-Baptiste Biot, 1774-1862; Felix Savart, 1791-1841). Ovo je osnovni eksperimentalni zakon za magnetostatičko polje generisano stalnom strujom. Napomenimo ovde da i pored toga što se električno i magnetno polje svakog pojedinačnog naelektrisanja menja u uočenoj tački M, ukupno električno i magnetno polje zbog stacionarnosti struje ne menja se u toku vremena.

## 7. Laplasov zakon

Drugi eksperimentalno ustanovljeni zakon u oblasti magnetostatičkih polja odnosio se na silu kojom statičko magnetno polje permanentnog magneta deluje na provodnik sa strujom. Nađeno je da za strujni element sa konstantnom strujom  $I$ , smešten u magnetno polje  $\mathbf{B}$ , ta sila može biti prikazana kao:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Nađeno je takođe da i ovde važi princip superpozicije sile, tako da se za silu koja deluje na celu konturu sa strujom (ili neki njen deo) dobija:

$$\mathbf{F} = I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

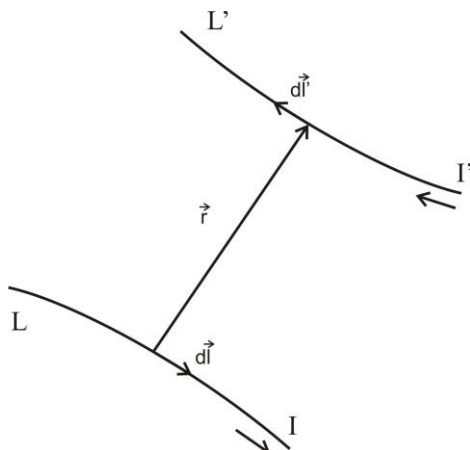
Ove dve relacije izražavaju tzv. *Laplasov zakon* (Pierre-Simon de Laplace, 1749-1827)<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Ukoliko se magnetno polje generiše stalnom strujom u nekoj drugoj sredini, umesto  $\mu_0$  treba u (18) staviti  $\mu$ ;  $\mu$  je magnetna propustljivost sredine, koja je pozitivna ali (za razliku od  $\varepsilon$ ) može biti i manja od  $\mu_0$ . Kod nekih sredina se mora uvesti tenzor magnetne propustljivosti. Za konstantu  $\mu_0$  se nailazi i na nazive (već donekle zastarele) magnetna propustljivost vakuuma ili magnetna permeabilnost vakuuma.

<sup>3</sup> Treba naglasiti da je Laplasov zakon eksperimentalno utvrđen za polja permanentnih magneta, a Bio-Savarov zakon za magnetna polja stalnih struja. U vreme ustanovljavanja osnovnih magnetostatičkih zakonitosti vladalo je uverenje da između ove dve kategorije magnetnih polja postoji bitna razlika, jer u prvom slučaju (bar se tako verovalo) linije sile

Nađimo sada silu kojom spoljne magnetno polje jačine  $\mathbf{B}$  djeluje na element struje  $d\mathbf{l}'$ . Pošto u ovom elementu ima  $n'S'dl'$  elementarnih naelektrisanja, a sila na svako od njih je određena obrascem  $\mathbf{F}_2 = q'(\mathbf{v}' \times \mathbf{B})$ , ukupna sila na uočeni strujni element biće  $d\mathbf{F} = n'S'dl' \cdot e\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$  se može napisati i u obliku

$$d\mathbf{F} = I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{B}. \quad (34)$$



**Slika 10.** Sila kojom strujni element  $I d\mathbf{l}$  djeluje na strujni element  $I' d\mathbf{l}'$ .

Ako ovo magnetno polje potiče od elementa stacionarne struje  $d\mathbf{l}$  drugog provodnika, kroz koji protiče struja jačine  $I$  (Slika 10), jačina ovog magnetnog polja određena je obrascem (33), pa dobijamo

$$d\mathbf{F} = I' d\mathbf{l}' \times \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{4\pi r^2},$$

odnosno

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I I' d\mathbf{l}' \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0)}{4\pi r^2}. \quad (35)$$

Ovaj obrazac određuje silu kojom element stacionarne struje  $I d\mathbf{l}$  djeluje na strujni element  $I' d\mathbf{l}'$ .<sup>4</sup> Ukupna sila kojom prvi provodnik djeluje na drugi dobiće se integracijom izraza (21) po konturama provodnika  $L$  i  $L'$

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \oint_L \oint_{L'} \frac{d\mathbf{l}' \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0)}{r^2}. \quad (36)$$

Ovaj zakon naziva se takođe *Amperov zakon*.

imaju svoj početak i kraj (na magnetnim polovima) dok su u drugom slučaju zatvorene. Amper je kasnije izneo pretpostavku da između ove dve kategorije magnetnih polja nema razlike, tj. da se i kod permanentnih magneta linije sile zatvaraju prolazeći kroz magnet (*Amperova hipoteza*), uz objašnjenje da je i ovde magnetno polje posledica postojanja mikroskopskih struja u materijalu magneta (*Amperove struje*).

<sup>4</sup> Napomenimo da za uzajamno dejstvo dvaju strujnih elemenata ne važi zakon akcije i reakcije, tj.  $d\mathbf{F}_{21} \neq -d\mathbf{F}_{12}$ . Amper je, međutim, pokazao da se za interakciju dveju zatvorenih kontura, kada kroz njih protiču stalne struje, dobija zakon akcije i reakcije, tj. da je  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ . Dokaz se zasniva na primeni nekoliko elementarnih identiteta vektorskog računa (B. Milić, *Mekselova elektrodinamika*, Beograd 2002, strana 22-23).

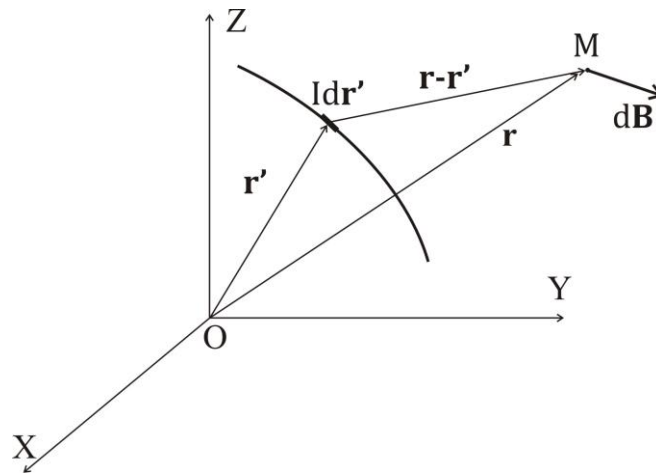
## 8. Bio Savar Laplasov zakon (napisan na drugi način)

Posmatrajmo magnetostatičko polje koje generišu naelektrisanja koja se kreću stacionarno. Ako se naelektrisanja kreću stacionarno, gustina struje ne zavisi eksplicitno od vremena, tj.  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Takođe gustina naelektrisanja kod stacionarnog kretanja ne zavisi od vremena, i u većini slučajeva zapreminska gustina naelektrisanja je jednaka nuli, tj.  $\rho(\mathbf{r}) = 0$  provodnik je elektroneutralan, pa je električno polje jednako nuli. Osnovni zakon magnetostatike je Bio-Savar-Laplasov zakon. On za zadata raspodelu gustine struje kao izvora magnetnog polja određuje magnetno polje.

Ako kroz linijski provodnik protiče struja jačine  $I$ , magnetna indukcija u tački  $r$  je data sa

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (37)$$

gde je  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m magnetna konstanta (ili magnetna propustljivost) vakuuma.



Slika 11. Bio-Savar-Laplasov zakon.

Ako se poprečni presek provodnika ne može zanemariti potrebno je da strujni element  $I d\mathbf{r}'$  zamenimo na sledeći način

$$I d\mathbf{r}' = \frac{I}{\Delta S_{\perp}} d\mathbf{r}' \Delta S_{\perp} = \mathbf{j} dV' \quad (38)$$

gde je  $\Delta S_{\perp}$  površina provodnika ortogonalna na pravac prenošenja naelektrisanja. Magnetna indukcija koju generiše gustina struje  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  je data sa

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (39)$$

## 9. Magnetno polje i vektorski potencijal

Magnetnu indukciju možemo izraziti preko vektorskog potencijala,  $\mathbf{A}$ , na sledeći način

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}.$$

Vektorski potencijal je dat sa

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (40)$$

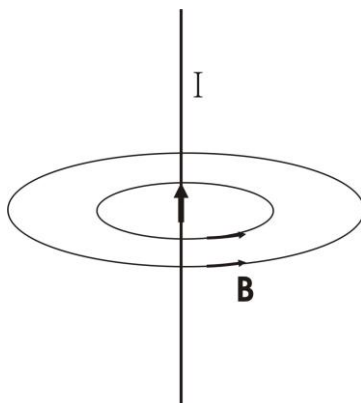
Primenom relacije  $\text{rot}(\psi\mathbf{A}) = \psi\text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla\psi$  neposredno se proverava gornja relacija:

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{rot} \left[ \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r}') - \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

jer je  $\text{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ , i

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Iz izraza  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$  sledi da je  $\text{div}\mathbf{B} = 0$ . Poslednji izraz znači da je magnetno polje bezizvorno tj. da ne postoje magnetna naelektrisanja. Drugim rečima magnetne linije nemaju ni početak ni kraj; ili su zatvorene ili počinju i završavaju se u beskonačnosti.

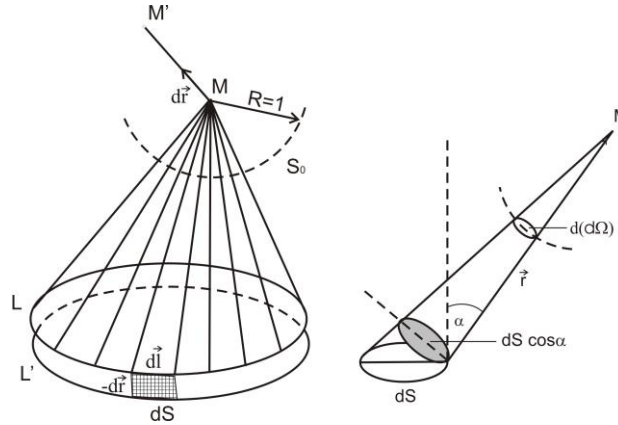


Slika 12. Magnetno polje linijskog provodnika.

## 10. Potencijalnost magnetnog polja struje

Pokažimo sad da je magnetno polje stacionarne struje van provodnika *potencijalno*, tj. da se magnetno polje (magnetna indukcija  $\mathbf{B}$ ) van provodnika sa stacionarnom strujom može prikazati kao negativni gradijent nekog skalara.

Uočimo konturu linijskog provodnika  $L$  i neku tačku  $M$  van tog provodnika (Slika 13). Iz ove tačke opišimo konusnu površ izvodnicom koja klizi po konturi  $L$ , a takođe i sferu jediničnog poluprečnika  $S_0$ . Ova sfera iz navedene konusne površi iseca izvesnu površ, čija se brojna vrednost naziva *prostorni ugao* pod kojim se iz tačke  $M$  vidi kontura  $L$ , i označimo ovaj prostorni ugao sa  $\Omega$ .



Slika 13. Izvođenje relacije  $\mathbf{B} = -\text{grad}\Psi$ .

Ako se iz tačke  $M$  pomerimo za  $d\mathbf{r}$  u tačku  $M'$ , prostorni ugao promeniće se za izvesnu veličinu  $d\Omega$ . Ista promena prostornog ugla bi se desila ako se kontura  $L$  pomeri translatorno u suprotnom smeru za  $-d\mathbf{r}$ . Tada je  $d\Omega$  prostorni ugao pod kojim se iz tačke  $M$  vidi površ između prvobitnog i krajnjeg položaja konture  $L$ , a  $d(d\Omega)$  prostorni ugao pod kojim se iz tačke  $M$  vidi šafirani element ove površi, koji je označen sa  $dS$ .

Ako je  $\alpha$  ugao između vektora  $\mathbf{r}$  i normale na element površi  $dS$  (Slika 12), i ako se iz tačke  $M$  opiše pored jedinične sfere i sfera poluprečnika  $r$ , ove sfere će iz navedene konusne površi isecati površine  $d(d\Omega)$  i  $dS \cos \alpha$ , a iz geometrije je poznato da je odnos ovih površina  $dS \cos \alpha : d(d\Omega) = r^2 : 1^2$ , a otuda nalazimo da je

$$d(d\Omega) = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{S}}{r^2}. \quad (41)$$

Pošto je element površi  $d\mathbf{S} = -d\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ , biće

$$d(d\Omega) = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot (-d\mathbf{r} \times d\mathbf{l})}{r^2} = -\frac{d\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0)}{r^2},$$

pa integracijom po svim šafiranim elementima površi dobijamo

$$d\Omega = -d\mathbf{r} \cdot \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2}. \quad (42)$$

S druge strane, pri pomeranju za  $d\mathbf{r}$  odgovarajuća promena prostornog ugla iznosi



$$d\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z} dz = d\mathbf{r} \cdot \text{grad}\Omega,$$

pa poređenjem sa (24) dobijamo

$$\text{grad}\Omega = -\oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2}.$$

Na osnovu ovog obrasca izraz (19) možemo pisati u obliku

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{grad}\Omega, \quad (43)$$

odnosno

$$\mathbf{B} = -\text{grad}\left(\frac{\mu_0}{4\pi} I\Omega\right), \quad (44)$$

odakle vidimo da se jačina magnetnog polja u tački  $M$  može prikazati kao negativni gradijent skalara

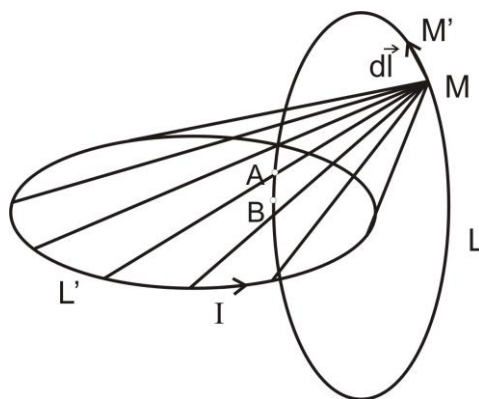
$$\Psi = \frac{\mu_0}{4\pi} I\Omega, \quad (45)$$

koji igra ulogu potencijalne energije magnetnog polja po jedinici "količine magnetizma".

*Prema tome, magnetno polje stacionarne struje van provodnika je potencijalno, ali ne i u unutrašnjosti provodnika.*

## 11. Amperova teorema

Nađimo sada magnetomotornu silu duž ma kakve geometrijske konture  $L$  koja opkoljava linijski provodnik  $L'$ , kroz koji protiče struja jačine  $I$  (Slika 14).



Slika 14. Magnetomotorna sila duž konture  $L$ .

Jačina magnetnog polja koje potiče od navedene struje u tački  $M$  konture  $L$ , prema (43) iznosi

$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{grad}\Omega$ , gde je  $\Omega$  prostorni ugao pod kojim se iz tačke  $M$  vidi kontura  $L'$ . Tada je magnetomotorna sila ovog magnetnog polja duž posmatrane geometrijske konture

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \text{grad}\Omega \cdot d\mathbf{l}. \quad (46)$$

Ako se iz tačke  $M$  pomerimo za  $d\mathbf{l}$  duž konture  $L$  u tačku  $M'$ , odgovarajuća promena prostornog ugla biće  $d\Omega = d\mathbf{l} \cdot \text{grad}\Omega$ , pa prethodni obrazac možemo napisati u obliku

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\Omega. \quad (47)$$

Integral na desnoj strani predstavlja ukupnu promenu navedenog prostornog ugla pri jednom obilasku konture  $L$ . Može se pokazati da ukupna promena prostornog ugla<sup>5</sup> iznosi  $-4\pi$ , te obrazac (29) dobija konačan oblik

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (48)$$

Ako kroz površ ograničenu konturom  $L$  prolazi više linijskih provodnika sa strujama jačine  $I_1, I_2, I_3, \dots$  magnetno polje svake od ovih struja prema principu superpozicije nezavisno je od ostalih, te imamo

$$\oint_L \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_1, \quad \oint_L \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_2, \quad \oint_L \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_3, \dots$$

Saberemo li ove jednačine i uzmemo u obzir da je jačina ukupnog magnetnog polja

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \dots$$

dobijamo

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_S I_i. \quad (49)$$

*Magnetomotorna sila koja potiče od stacionarnih struja duž ma kakve konture srazmerna je algebarskom zbiru jačina svih ovih struja koje prolaze kroz ma koju površ ograničenu tom konturom. Ovaj stav se naziva Amperova teorema i igra sličnu ulogu za magnetno polje kao Gaussova teorema za električno. Pomoću ove teoreme u geometrijski jednostavnim slučajevima može se naći jačina magnetnog polja stacionarnih struja, što je često jednostavnije nego pomoću Biot-Savartovog zakona.*

---

<sup>5</sup> Đ. Mušicki, Uvod u teorijsku fiziku III/1, Beograd 1981, strana 165.

## 12. Amperova teorema (primenom vektorskog potencijala)

Primenom formule (40) za vektorski potencijal kao i Dirak-Grinovog identiteta (17) za rotor magnetne indukcije dobijamo

$$\begin{aligned}
 \text{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \text{rot rot}\mathbf{A} = \text{grad div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \int \text{div} \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \text{grad} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' + 4\pi \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3r' \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})
 \end{aligned}$$

gde smo iskoristili  $\text{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ . Ako dalje primenimo

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (50)$$

gde je  $\nabla'$  gradijent po koordinatama vektora  $\mathbf{r}'$ , lipoonovo primenimo formulu

$$\text{div}(\psi \mathbf{A}) = \psi \text{div}\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \psi$$

imamo

$$\begin{aligned}
 \text{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \text{grad} \int \left( \text{div}' \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \text{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}') \right) d^3r' - 4\pi \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \oint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\
 &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})
 \end{aligned} \quad (51)$$

Zbog uslova stacionarnosti, primenom jednačine kontinuiteta uzeli smo

$$\text{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial t} = 0 \quad (52)$$

kao i činjenicu da je zapreminska gustina struje  $\mathbf{j}$  lokalizovana unutar oblasti  $V$  pa je  $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}|_{\partial V} = 0$ . Ako ovaj uslov ne bi važio onda bi na granici oblasti  $V$  gustina struje imala normalnu komponentu, tako da bi naelektrisanja prolazila kroz granicu oblasti  $V$ . U tom slučaju  $\partial V$  ne bi bila granica oblasti  $V$ .

Dakle, dobili smo

$$\text{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (53)$$

Ovo je lokalni oblik Amperove teoreme. Integracijom po nepokretnoj konturi dobijamo integralni oblik Amperove teoreme

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_s \quad (54)$$

gde je  $I_s$  jačina struje koja prolazi kroz površ oivičenu konturom  $L$ . Cirkulacija magnetne indukcije proporcionalna je sa strujom  $I_s$ .

Rezimirajmo na kraju da je magnetostatičko polje određeno sa vrednostima njegove divergencije i rotora:

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (55)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (56)$$