Квантно мерење

– Селективно предиктивно мерење опсервабле $\hat{A}$ на чистом ансамблу $|\psi\rangle$

Резултат мерења a_n $\left(\hat{A} = \sum_n a_n \hat{P}_n\right)$

$$|\psi_n\rangle = \frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle}} \quad ; \quad \hat{P}_n \text{ својствени пројектор}$$

када је мерена вредност недегенерисана

– Селективно предиктивно мерење опсервабле $\hat{A}$ на стању $\hat{\rho}$

Резултат мерења a_n

$$\hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n}{\underbrace{\mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{P}_n)}_{\text{константа нормирања}}}$$

– Неселективно предиктивно мерење опсервабле $\hat{A}$ на стању $\hat{\rho}$

Резултат мерења a_n

$$\hat{\rho}' = \sum_n \hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n$$

стандардно одступање

– von Neumann-ова ентропија (још једна мера класичне неодређености)

$S = -\mathrm{tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho})$, односно $S = -\sum_n r_n \ln r_n$, $\hat{\rho} = \sum_n r_n \hat{P}_n$

1. Упадни сноп атома у Штерн-Герлаховом експерименту је припремљен у стање $|+\rangle_y$. Магнет је постављен дуж х-осе. Наћи коначно стање, као и вероватноћу добијања резултата $\hbar/2$ мерења пројекције спина.-

Почетно стање $|+\rangle_y$

Мерена опсервабла $\hat{S}_x$

Коначно стање

$$|\psi\rangle = \frac{\hat{P}_{x+}|+\rangle_y}{\sqrt{{}_y\langle+|\hat{P}_{x+}|+\rangle_y}} \quad ; \quad \hat{P}_{x+} = |+\rangle_x\langle+|$$

$$|\psi\rangle = \frac{{}_x\langle+|+\rangle_y}{\sqrt{{}_y\langle+|\hat{P}_{x+}|+\rangle_y}}\, |+\rangle_x$$

Познато из стандардног курса КМ

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + |-\rangle_z\right), \quad |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z - |-\rangle_z\right)$$

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + i|-\rangle_z\right), \quad |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z - i|-\rangle_z\right)$$

$$\hat{\sigma}_z|+\rangle_z = +|+\rangle_z, \quad \hat{\sigma}_z|-\rangle_z = -|-\rangle_z, \quad \hat{\sigma}_z = |+\rangle_z\langle+| - |-\rangle_z\langle-|$$

$${}_x\langle+|+\rangle_y = \frac{1+i}{2}$$

$$ {}_y\langle + | \hat{P}_{x+} | + \rangle_y = {}_y\langle + | + \rangle_x \langle + | + \rangle_y = | {}_x\langle + | + \rangle_y |^2 = \frac{1}{2} $$

$$ |\psi\rangle = \frac{\frac{1+i}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} |+\rangle_x = \frac{1+i}{\sqrt{2}} |+\rangle_x $$

2. ИЗРАЧУНАТИ СТАТИСТИЧКИ ОПЕРАТОР КОЈИ ПРЕДСТАВЉ. КОНАЧНО СТАЊЕ АНСАМБЛА У НЕСЕЛЕКТИВНОЈ ВАРИЈАНТ МЕРЕЊА РАЗМАТРАНОМ У ПРЕТХОДНОМ ЗАДАТКУ. ЗА ТО СТАЊЕ ИЗРАЧУНАТИ СТАТИСТИЧКО ОДСТУПАЊЕ ОПСЕРВАБЛЕ $\hat{S}_y$

Ф-ЛА

$$\hat{\rho}' = \sum_m \hat{P}_m \rho \hat{P}_m$$

$$\hat{\rho}' = \hat{P}_{x+} \hat{\rho} \hat{P}_{x+} + \hat{P}_{x-} \hat{\rho} \hat{P}_{x-} \quad , \quad \hat{P}_{x+} = |+\rangle_x \langle +| , \quad \hat{P}_{x-} = |-\rangle_x \langle -|$$

$$\hat{\rho}' = |+\rangle_x \langle +|+\rangle_y \langle +|+\rangle_x \langle +| +$$
$$|-\rangle_x \langle -|+\rangle_y \langle +|-\rangle_x \langle -|$$

$$_x\langle +|+\rangle_y = \frac{1+i}{2} \Rightarrow {}_y\langle +|+\rangle_x = \frac{1-i}{2}$$

$$_x\langle -|+\rangle_y = \frac{1-i}{2} \Rightarrow {}_y\langle +|-\rangle_x = \frac{1+i}{2}$$

$$\hat{\rho}' = \frac{1+i}{2}\frac{1-i}{2} |+\rangle_x \langle +| + \frac{1-i}{2}\frac{1+i}{2} |-\rangle_x \langle -|$$

$$= \frac{1}{2}\left(|+\rangle_x \langle +| + |-\rangle_x \langle -|\right)$$

НЕЈЕДНОЗНАЧНОСТ АНСАМБЛСКЕ ИНТЕРПРЕТАЦИЈЕ

$$\hat{\rho}' = \frac{1}{2}\left(|+\rangle_z\langle+| + |-\rangle_z\langle-|\right) \equiv \frac{\hat{I}}{2}$$

ВЕЖБА:

А. Потврдити важење последње једнакости

Б. Како гласи матрица густине, за последњи оператор у $\hat{S}_z$ базису?

Стандардно одступање:

$$\Delta\hat{S}_y = +\sqrt{\langle\hat{S}_y^2\rangle - \langle\hat{S}_y\rangle^2}$$

$$\langle\hat{S}_y\rangle = ?$$

$$\langle\hat{S}_y\rangle = \mathrm{tr}\,\hat{\rho}'\hat{S}_y = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\underbrace{\left(|+\rangle_z\langle+| + |-\rangle_z\langle-|\right)}_{I}\frac{\hbar}{2}i\left(|-\rangle_z\langle+| - |+\rangle_z\langle-|\right)\right)$$

$$= \mathrm{tr}\,\frac{i\hbar}{4}\left(|-\rangle_z\langle+| - |+\rangle_z\langle-|\right) =$$

$$= \frac{i\hbar}{4}\sum_{i=\pm}{}_z\langle i|\,|-\rangle_z\langle+| - |+\rangle\langle-|\,|i\rangle_z = 0$$

(или једноставније $\langle\hat{S}_y\rangle = \mathrm{tr}\,\hat{\rho}'\hat{S}_y =$
$= \mathrm{tr}\,\frac{\hat{I}}{2}\hat{S}_y = \mathrm{tr}\,\hat{S}_y =$

$$\langle\hat{S}_y^2\rangle = \mathrm{tr}\left(\hat{\rho}'\hat{S}_y^2\right) = \mathrm{tr}\left(\hat{\rho}\frac{\hbar^2}{4}\right) = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Delta\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}$$

ВЕЖБА! Колико је $\Delta\hat{S}_y$ у стању $\hat{\rho}$?

3. Систем се налази у стању

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+\rangle_z - \frac{1}{2}|-\rangle_z$$

Колика је вероватноћа да мерење опсервабле $\hat{S}_y$ буде добијено $+\frac{\hbar}{2}$? Како гласи стање након мерења?

$$\omega\left(\hat{S}_y, +\frac{\hbar}{2}, |\psi\rangle\right) = \langle\psi|\hat{P}_+|\psi\rangle$$

$$\hat{P}_+ = |+\rangle_y\langle+|$$

$$\langle\psi|\hat{P}_+|\psi\rangle = \langle\psi|+\rangle_y\langle+|\psi\rangle$$

$$_y\langle+|\psi\rangle = {}_y\langle+|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|+\rangle_z - \frac{1}{2}|-\rangle_z\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,{}_y\langle+|+\rangle_z - \frac{1}{2}\,{}_y\langle+|-\rangle_z$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2\sqrt{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle\psi|+\rangle_y = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}$$

$$\omega = \langle\psi|\hat{P}_+|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-i)\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i) = \frac{1}{8}\left((\sqrt{3})^2+1\right) = \frac{1}{2}$$

СТАЊЕ НАКОН МЕРЕЊА

$$|\phi\rangle = \frac{\hat{P}_+ |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_+|\psi\rangle}} = \frac{|+\rangle_y {}_y\langle +|\psi\rangle}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\, {}_y\langle +|\psi\rangle\, |+\rangle_y$$

$$= \frac{1}{2\cancel{\sqrt{2}}}(\sqrt{3}+i)\cdot\cancel{\sqrt{2}}\, |+\rangle_y$$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{2}\, |+\rangle_y$$

ПОДАТАК

$$x+iy = r e^{i\varphi}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ , \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$r = 1\ , \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$|\phi\rangle = e^{i\frac{\pi}{6}}\, |+\rangle_y$$

ФАЗА: НЕМА ПОСЛЕДИЦЕ ПО ВЕРОВАТНОЋЕ МЕРЕЊА

ПРОВЕРИТИ ЗА ВЕЖБУ

4. Систему A+B се налази у стању:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right).$$

Колика је вероватноћа да се мерењем на подсистему A измери вредност $+\frac{\hbar}{2}$ опсервабле $\hat{S}_z$? Какво је стање након мерења? (Напомена: у горњем стању $|0\rangle$ и $|1\rangle$ значе $|0\rangle_z$ и $|1\rangle_z$, за оба подсистема)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B\right)$$

$$\hat{\sigma}_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \quad ; \quad \hat{\sigma}_z|0\rangle = |0\rangle \text{ и } \hat{\sigma}_z|1\rangle = -|1\rangle \text{ односно}$$

$$\hat{S}_z|0\rangle = \frac{\hbar}{2}|0\rangle, \quad \hat{S}_z|1\rangle = -\frac{\hbar}{2}|1\rangle$$

Пројектори за подсистем A

$$\hat{P}_A^{\pm} \equiv \hat{P}_A^{\pm}\otimes\hat{I}_B, \quad \hat{P}_A^{+} + \hat{P}_A^{-} = \hat{I}_A$$

$$w\left(\hat{S}_z^A, |\psi\rangle, +\frac{\hbar}{2}\right) = \langle\psi|\hat{P}_A^{+}|\psi\rangle =$$

$$\langle\psi|\hat{P}_A^{+}\otimes\hat{I}_B|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left({}_A\langle 0|{}_B\langle 1| - {}_A\langle 1|{}_B\langle 0|\right)\hat{P}_A^{+}\otimes\hat{I}_B\left(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big({}_A\langle 0|\hat{P}_A^{+}|0\rangle_A\,{}_B\langle 1|\hat{I}_B|1\rangle_B - {}_A\langle 0|\hat{P}_A^{+}|1\rangle_A\,\cancel{{}_B\langle 1|\hat{I}_B|0\rangle_B}^{\,0} -$$

$$- {}_A\langle 1|\hat{P}_A^{+}|0\rangle_A\,\cancel{{}_B\langle 0|\hat{I}_B|1\rangle_B}^{\,0} + {}_A\langle 1|\hat{P}_A^{+}|1\rangle_A\,{}_B\langle 0|\hat{I}_B|0\rangle_B\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left({}_A\langle 0|\hat{P}_A^+|0\rangle_A + {}_A\langle 1|\hat{P}_A^+|1\rangle_A \right)$$

$$\left[\ \hat{P}_A^+ = |0\rangle_A\langle 0|\ \right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

СТАЊЕ НАКОН МЕРЕЊА

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_A^+ \otimes \hat{I}_B |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_A^+ \otimes \hat{I}_B|\psi\rangle}}$$

$$\hat{P}_A^+ \otimes \hat{I}_B|\psi\rangle = \hat{P}_A^+ \otimes \hat{I}_B \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A|1\rangle_B$$

$$|\psi'\rangle = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A|1\rangle_B}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = |0\rangle_A|1\rangle_B$$

5. Систем $A+B$ се налази у стању !

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}|0\rangle_A|0\rangle_B + \sqrt{\frac{3}{8}}|0\rangle_A|1\rangle_B + \frac{1}{2}|1\rangle_A|0\rangle_B + \frac{1}{2}|1\rangle_A|1\rangle_B$$

Наћи вероватноћу мерења својствене вредности $-\frac{\hbar}{2}$ опсервабле $\hat{S}_x$ на подсистему B. Какво је стање након мерења? (Напомена: $|\psi\rangle$ је записано у $\hat{S}_z$ репрезентацији)

$$W(\hat{S}_x^B, |\psi\rangle, -\frac{\hbar}{2}) = {}_{AB}\langle\psi|\hat{P}_B^-|\psi\rangle_{AB}$$

$$\hat{P}_B^- = |-\rangle_x\langle -| \quad ; \quad |+\rangle_x = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |-\rangle_x = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{P}_B^- = \frac{1}{2}\left(|0\rangle_B\langle 0| - |0\rangle_B\langle 1| - |1\rangle_B\langle 0| + |1\rangle_B\langle 1|\right)$$

$$W(\dots) = \frac{1}{2}\left(\langle\psi|0\rangle_B\langle 0|\psi\rangle - \langle\psi|0\rangle_B\langle 1|\psi\rangle - \langle\psi|1\rangle_B\langle 0|\psi\rangle + \langle\psi|1\rangle_B\langle 1|\psi\rangle\right)$$

$${}_B\langle 0|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}|0\rangle_A + \frac{1}{2}|1\rangle_A$$

$${}_B\langle 1|\psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{8}}|0\rangle_A + \frac{1}{2}|1\rangle_A$$

$$W(\dots) = \frac{1}{2}\Big[\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\,{}_A\langle 0| + \frac{1}{2}\,{}_A\langle 1|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{8}}|0\rangle_A + \frac{1}{2}|1\rangle_A\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\,{}_A\langle 0| + \frac{1}{2}\,{}_A\langle 1|\right)\left(\sqrt{\frac{3}{8}}|0\rangle_A + \frac{1}{2}|1\rangle_A\right) -$$

$$-\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\,{}_A\langle 0| + \frac{1}{2}\,{}_A\langle 1|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{8}}|0\rangle_A + \frac{1}{2}|1\rangle_A\right) +$$

$$+\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\,{}_A\langle 0| + \frac{1}{2}\,{}_A\langle 1|\right)\left(\sqrt{\frac{3}{8}}|0\rangle_A + \frac{1}{2}|1\rangle_A\right)\Big]$$

$$W(\dots) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{3}{8} + \cancel{\frac{1}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

стање након мерења

$$|\psi\rangle' = \frac{\hat{I}_A \otimes \hat{P}_B^- |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{I}_A \otimes \hat{P}_B^-|\psi\rangle}}$$

$$\hat{I}_A \otimes \hat{P}_B^- |\psi\rangle = \hat{I}_A \otimes \frac{1}{2}\left(|0\rangle_B\langle 0| - |0\rangle_B\langle 1| - |1\rangle_B\langle 0| + |1\rangle_B\langle 1|\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{8}}|0\rangle_A|0\rangle_B + \sqrt{\frac{3}{8}}|0\rangle_A|1\rangle_B + \frac{1}{2}|1\rangle_A|0\rangle_B + \frac{1}{2}|1\rangle_A|1\rangle_B\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{8}} |0\rangle_A |0\rangle_B + \cancel{\frac{1}{2} |1\rangle_A |0\rangle_B} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} |0\rangle_A |0\rangle_B - \cancel{\frac{1}{2} |1\rangle_A |0\rangle_B}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{8}} |0\rangle_A |1\rangle_B - \cancel{\frac{1}{2} |1\rangle_A |1\rangle_B} + \sqrt{\frac{3}{8}} |0\rangle_A |1\rangle_B + \cancel{\frac{1}{2} |1\rangle_A |1\rangle_B} \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) |0\rangle_A |0\rangle_B + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) |0\rangle_A |1\rangle_B \right.$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) |0\rangle_A \left(|0\rangle_B - |1\rangle_B\right)$$

$$= \frac{1}{4}(1-\sqrt{3})\, |0\rangle_A \otimes \frac{|0\rangle_B - |1\rangle_B}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi'\rangle = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}(1-\sqrt{3})}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{\cancel{4}}} |0\rangle_A \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_B - |1\rangle_B\right)$$

$$|\psi'\rangle = 2\,\frac{(1-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}} |0\rangle_A \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_B - |1\rangle_B\right)$$

$$\downarrow$$

Нормирати ово стање (велика

$$|\psi'\rangle^N = \frac{|\psi'\rangle}{\sqrt{\langle\psi'|\psi'\rangle}} = \frac{\sqrt{2}\,\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}{2\,\frac{(1-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}} |0\rangle_A \otimes \left(|0\rangle_B - |1\rangle_B\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_A \otimes \left(|0\rangle_B - |1\rangle_B\right)$$

6.

Задато је стање сложеног система A+B:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B\right).$$

Одредити ентропије сложеног система и појединачних подсистема:

$$S = -\operatorname{tr}\hat{\rho}\log_2\hat{\rho}$$

$$S = -\sum_n r_n \log_2 r_n, \qquad \hat{\rho} = \sum_n r_n \hat{P}_n$$

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\Big[|0\rangle_A\langle 0| \otimes |0\rangle_B\langle 0| - |0\rangle_A\langle 1| \otimes |0\rangle_B\langle 1| - |1\rangle_A\langle 0| \otimes |1\rangle_B\langle 0| +$$

$$|1\rangle_A\langle 1| \otimes |1\rangle_B\langle 1|\Big]$$

Матрица

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Св. вредности $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

$S(\rho) = -\ln 1 = 0$ (ентропија чистог стања)

За подсистем B

$$\hat{\rho}_B = \left(\frac{1}{2}|0\rangle_B\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle_B\langle 1|\right)$$

Матрица

$$\rho_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$S(\rho_B) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = \log_2\frac{1}{2} = -\log_2 2^{-1} = 1$$

Проверити за подсистем А.

Дакле, о целини имамо максимално знање, али о деловима унутар сложеног система не!

7. Колика је ентропија стања

$$|\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{\sqrt{5}}{3}|1\rangle \,?$$

А ентропија стања $\longrightarrow$ $\hat{\rho} = \frac{4}{9}|0\rangle\langle 0| + \frac{5}{9}|1\rangle\langle 1|$

Чисто

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{4}{9}|0\rangle\langle 0| + \frac{2\sqrt{5}}{9}|0\rangle\langle 1| + \frac{2\sqrt{5}}{9}|1\rangle\langle 0| + \frac{5}{9}|1\rangle\langle 1|$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2\sqrt{5}}{9} \\ \frac{2\sqrt{5}}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ – $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 0$ – $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

за већину

$$S(\hat{\rho}) = \cancel{-1\log_2 1} \; \cancel{-0\lg 0} = 0$$

Мешано

$$S(\hat{\rho}) = -\lambda_1 \log_2 \lambda_1 - \lambda_2 \log \lambda_2 = -\frac{5}{9}\log_2\frac{5}{9} - \frac{4}{9}\log_2\frac{4}{9}$$

$$= 0{,}991076$$

8.3. Дато је стање сложеног система у ШКФ (једнозначн

$$|\psi\rangle = \sum_k \sqrt{r_k}\, |k\rangle_A |k\rangle_B$$

(селективно)

Нека се мере опсервабле $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$, на подсистемима 1 и 2, респективно. Како гласе коначна стања подсистема 1 и 2 након мерења?

— o —

Нека је $[\hat{\rho}_1, \hat{A}_1] = 0$ и $[\hat{\rho}_2, \hat{A}_2] = 0$

Из ШКФ $\Rightarrow \hat{\rho}_1 = \sum_k r_k |k\rangle_1\langle k|$ и

$$\hat{\rho}_2 = \sum_k r_k |k\rangle_2\langle k|$$

$$|\psi_k\rangle_{12} = \frac{\hat{P}_{k1} \otimes \hat{I}_2 |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_{k1} \otimes \hat{I}_2|\psi\rangle}}, \quad |\psi_k\rangle_{12} = \frac{\hat{I}_1 \otimes \hat{P}_{k2}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{I}_1 \otimes \hat{P}_{k2}|\psi\rangle}}$$

$$\hat{A}_1 = \sum_k a_{k1} \hat{P}_{k1} = \sum_k a_{k1} |k\rangle_1\langle k|$$

$$\hat{A}_2 = \sum_k a_{k2} \hat{P}_{k2} = \sum_k a_{k2} |k\rangle_2\langle k|$$

$$\langle\psi|\hat{P}_{k1} \otimes \hat{I}_2|\psi\rangle = \sum_j r_j \; {}_2\langle j|\,{}_1\langle j|k\rangle_1\langle k| \otimes \hat{I}_2\, |j\rangle_1 |j\rangle_2$$

$$= \sum_j r_j \; {}_1\langle j|k\rangle_1 \langle k|j\rangle_1 \; {}_2\langle j|\hat{I}_2|j\rangle_2$$

$$= \sum_j r_k \delta_{jk} = r_k$$

$$\hat{P}_{k1} \otimes \hat{I}_2 |\psi\rangle = \hat{P}_{k1} \otimes \hat{I}_2 \sum_j \sqrt{r_j}\, |j\rangle_1 |j\rangle_2$$

$$= |k\rangle_1 \langle k| \otimes \hat{I}_2 \sum_j \sqrt{r_j}\, |j\rangle_1 |j\rangle_2$$

$$= \sum_j \sqrt{r_j}\, |k\rangle_1 \underbrace{\langle k|j\rangle_1}_{\delta_{kj}} \otimes \underbrace{\hat{I}_2 |j\rangle_2}_{|j\rangle_2}$$

$$= \sum_j \sqrt{r_j}\, \delta_{kj}\, |k\rangle_1 |j\rangle_2$$

$$= \sqrt{r_k}\, |k\rangle_1 |k\rangle_2$$

$$|\phi_k\rangle_{12} = \frac{\sqrt{r_k}\, |k\rangle_1 |k\rangle_2}{\sqrt{r_k}} = |k\rangle_1 |k\rangle_2$$

Након мерења опсервабле на првом подсистему одређено је и стање другог подсистема.

За вежбу, урадити исто за опсервабу $\hat{A}_2$

Резултат:

$$\underline{|\varphi_k\rangle_{12} = |k\rangle_1 |k\rangle_2}$$

Симетрије у нерелативистичкој квантној механици

Вигнеров теорем: Свака трансформација симетрије може да се пренесе у Хилбертов простор $\mathcal{H}$ тако да постане или унитарни оператор $\hat{U}$ или антиунитарни оператор $\hat{U}_a$.

$$\hat{U}_{\vec{a}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}} \quad \text{транслација (просторна)}$$

$$\hat{U}_b = e^{-\frac{i}{\hbar} b\hat{H}} \quad \text{транслација (временска)}$$

$$\hat{\mathcal{U}}(\vec{\phi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\hat{\vec{l}}} \quad \text{ротација}$$

$$\hat{U}_{\vec{v}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{v}\cdot m\hat{\vec{r}}} \quad \text{boost}$$

10-параметарска Галилејева група $(\vec{a}, b, \vec{\phi}, \vec{v})$ и одговарајући генератори $(\hat{\vec{p}}, \hat{H}, \hat{\vec{l}}, \hat{\vec{r}})$

Baker-Hausdorff-ова лема

$$e^{-\eta\hat{A}}\hat{B}e^{\eta\hat{A}} = \hat{B} + \eta[\hat{B},\hat{A}] + \frac{\eta^2}{2!}[[\hat{B},\hat{A}],\hat{A}] + \ldots$$

$$e^{\eta\hat{A}}\hat{B}e^{-\eta\hat{A}} = \hat{B} + \eta[\hat{A},\hat{B}] + \frac{\eta^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \ldots$$

Подсетник: Сваки антиунитарни оператор се може представити као $\hat{U}_a = \underbrace{\hat{K}}_{\text{оператор конјуговања}}\overbrace{\hat{U}}^{\text{унитарни оператор}}$

1. Наћи оператор $\hat{x}'$ задат изразом:

$$\hat{x}' = \hat{U}^{+} \hat{x} \hat{U}$$

где $\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar} a \hat{p}_x}$, а a представља реалан број са димензијом дужине.

$$\hat{x}' = e^{\frac{i}{\hbar} a \hat{p}_x} \hat{x} e^{-\frac{i}{\hbar} a \hat{p}_x}$$

Резултат из квантне механике:

$$e^{\eta \hat{A}} \hat{B} e^{-\eta \hat{A}} = \hat{B} + \eta [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\eta^2}{2} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

$$\hat{x}' = \hat{x} + \frac{i}{\hbar} a [\hat{p}_x, \hat{x}] + \left(\frac{i}{\hbar} a\right)^2 \frac{1}{2} [\hat{p}_x, [\hat{p}_x, \hat{x}]] + \dots$$

$$\hat{x}' = \hat{x} + \frac{i}{\hbar} a (-i\hbar) \hat{I} = \hat{x} + a\hat{I}$$

Уочити сличност са класичним транслацијама

Питање: Како једнодимензионална транслација делује на остале степене слободе?

2. Наћи оператор $\hat{p}_x'$ задат изразом

$$\hat{p}_x' = \hat{U}\hat{p}_x\hat{U}^{+}$$

где $\hat{U} = e^{\frac{ib\hat{x}}{\hbar}}$ а b је реалан број са димензијом импулса.

$$\hat{p}_x' = e^{\frac{ib\hat{x}}{\hbar}}\hat{p}_x e^{-\frac{i}{\hbar}b\hat{x}} =$$

$$= \hat{p}_x + \frac{i}{\hbar}b[\hat{x},\hat{p}_x] + \left(\frac{ib}{\hbar}\right)^2\frac{1}{2}[\hat{x},[\hat{x},\hat{p}_x]]$$

$$= \hat{p}_x - b\hat{I}$$

Упоредити са класичним случајем.

Како горња трансформација делује на остале степене слободе ($\hat{y}$ и $\hat{z}$)?

3. Наћи резултат деловања оператора $\hat{U}_a = e^{-\frac{ia\hat{p}_x}{\hbar}}$ на својствено стање опсервабле

а) положаја

б) импулса једнодимензионалне честице.

Опсервабла положаја

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$$

$$\hat{U}_a^{+}\hat{x}\hat{U}_a = \hat{x} + a\hat{I} \Rightarrow \underset{\text{л. с.}}{\hat{U}_a\hat{x}} = \underset{\text{д. с.}}{\hat{x}\hat{U}_a - a\hat{U}_a}$$

$$\hat{U}_a\hat{x}|x\rangle = x\hat{U}_a|x\rangle$$

$$(\hat{x}\hat{U}_a - a\hat{U}_a)|x\rangle = x\hat{U}_a|x\rangle$$

$$\hat{x}\hat{U}_a|x\rangle = (x+a)\hat{U}_a|x\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\hat{U}_a|x\rangle = |x+a\rangle}$$

Опсервабла импулса

$$\hat{U}_a^{+}\hat{p}_x\hat{U}_a = \hat{p}_x$$

$$\hat{U}_a\hat{p}_x = \hat{p}_x\hat{U}_a$$

$$\hat{U}_a\hat{p}_x|p_x\rangle = p_x\hat{U}_a|p_x\rangle$$

$$\hat{p}_x\hat{U}_a|p_x\rangle = p_x\hat{U}_a|p_x\rangle$$

$$\hat{U}_a|p_x\rangle = |p_x\rangle$$

4. Нађи начин деловања оператора $\hat{U}_a$ на стање $|\psi\rangle$ у

а) координатној

б) импулсној репрезентацији 1Д честице.

а) $\hat{U}_a \psi(x) \overset{\text{деф}}{=} \langle x|(\hat{U}_a|\psi\rangle) = (\langle x|\hat{U}_a)|\psi\rangle$

$$\hat{U}_a|x\rangle = |x+a\rangle$$

$$|x\rangle = \hat{U}_a^{+}|x+a\rangle \quad , \text{ смена } x+a=\xi$$

$$|\xi-a\rangle = \hat{U}_a^{+}|\xi\rangle$$

$$\langle \xi-a| = \langle \xi|\hat{U}_a$$

$$\boxed{\hat{U}_a \psi(x) = \langle x-a|\psi\rangle = \psi(x-a)}$$

б) $\hat{U}_a \psi(p_x) \overset{\text{деф}}{=} \langle p_x|(\hat{U}_a|\psi\rangle) = (\langle p_x|\hat{U}_a)|\psi\rangle$

$$\hat{U}_a|p_x\rangle = |p_x\rangle$$

$$|p_x\rangle = U_a^{+}|p_x\rangle$$

$$\langle p_x| = \langle p_x|\hat{U}_a^{+}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\hat{U}_a \psi(p_x) = \psi(p_x)}$$

3. Наћи начин деловања оператора $\hat{U}_b = e^{-\frac{i}{\hbar} b\hat{x}}$ на својствено стање опсервабле а) положаја, б) импулса 1Д честице. А потом наћи деловање овог оператора на стање $|\psi\rangle$ у координатној и импулсној репрезентацији.

$$\hat{x}' = \hat{U}_b^{+} \hat{x} \hat{U}_b = \hat{x} \quad , \quad \hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$$

$$\hat{U}_b \hat{x}|x\rangle = x \hat{U}_b |x\rangle$$

$$\hat{U}_b^{+} \hat{x} \hat{U}_b = \hat{x} \Rightarrow \hat{x} \hat{U}_b = \hat{U}_b \hat{x}$$

$$\hat{x} \hat{U}_b |x\rangle = x \hat{U}_b |x\rangle \Rightarrow \hat{U}_b |x\rangle = |x\rangle$$

$$\hat{p}_x' = \hat{U}_b^{+} \hat{p}_x \hat{U}_b = \hat{p}_x - b\hat{I} \quad , \quad \hat{p}_x |p_x\rangle = p_x |p_x\rangle$$

$$\hat{U}_b \hat{p}_x |p_x\rangle = p_x \hat{U}_b |p_x\rangle$$

$$\hat{U}_b^{+} \hat{p}_x \hat{U}_b = \hat{p}_x - b \Rightarrow \hat{p}_x \hat{U}_b = \hat{U}_b \hat{p}_x - \hat{U}_b b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{U}_b \hat{p}_x = \hat{p}_x \hat{U}_b + \hat{U}_b b$$

$$(\hat{p}_x \hat{U}_b + \hat{U}_b b)|p_x\rangle = p_x \hat{U}_b |p_x\rangle$$

$$\hat{p}_x \hat{U}_b |p_x\rangle = (p_x - b) \hat{U}_b |p_x\rangle$$

$$\hat{U}_b |p_x\rangle = |p_x - b\rangle$$

ДЕЛОВАЊЕ НА $|\psi\rangle$

$$\hat{U}_b\,\psi(\vec{p}_x) \overset{def}{=} \langle p_x|(\hat{U}_b|\psi\rangle) = (\langle p_x|\hat{U}_b)|\psi\rangle =$$

$$\hat{U}_b|p_x\rangle = |p_x - b\rangle$$

СМЕНА $p_x - b = p_\xi$

$$\hat{U}_b|p_\xi + b\rangle = |p_\xi\rangle$$

$$|p_\xi + b\rangle = \hat{U}_b^{+}|p_\xi\rangle$$

$$\langle p_\xi + b| = \langle p_\xi|\hat{U}_b$$

$$\hat{U}_b\,\psi(p_x) = \psi(p_x + b)$$

$$\hat{U}_b\,\psi(x) = \langle x(\hat{U}_b|\psi\rangle) = (\langle x|\hat{U}_b)|\psi\rangle =$$

$$\hat{U}_b|x\rangle = |x\rangle$$

$$|x\rangle = \hat{U}_b^{+}|x\rangle$$

$$\langle x| = \langle x|\hat{U}_b$$

$$\hat{U}_b\,\psi(x) = \psi(x)$$

6. Доказати да за оператор ротације у спинском фактор простору важи једнакост:

$$e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_z} = \cos\frac{\phi}{2} - i\hat{\sigma}_z \sin\frac{\phi}{2}$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_z} = \hat{I} - i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_z - \frac{1}{2!}\frac{\phi^2}{2^2}\hat{\sigma}_z^2 + \frac{1}{3!}\, i\,\frac{\phi^3}{2^3}\hat{\sigma}_z^3 + $$

$$+ \frac{1}{4!}\frac{\phi^4}{2^4}\hat{\sigma}_z^4 + \dots$$

$$e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_z} = \hat{I} - i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_z - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{2}\right)\hat{I} + \frac{1}{3!}\, i\left(\frac{\phi}{2}\right)^3\hat{\sigma}_z + \frac{1}{4!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^4\hat{I} + \dots$$

$$= \hat{I}\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^4 + \dots\right) -$$

$$- i\hat{\sigma}_z\left(\frac{\phi}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \dots\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_z} = \hat{I}\cos\frac{\phi}{2} - i\hat{\sigma}_z \sin\frac{\phi}{2}}$$

8. Наћи оператор $\hat\sigma_x'$ задат изразом:

$$\hat\sigma_x' = \hat U^+ \hat\sigma_x \hat U$$

где $\hat U = e^{-i\frac{\phi}{2}\hat\sigma_z}$.

$$\hat\sigma_x' = e^{i\frac{\phi}{2}\hat\sigma_z}\,\hat\sigma_x\, e^{-i\frac{\phi}{2}\hat\sigma_z} =$$

$$[\hat\sigma_x,\hat\sigma_y] = 2i\hat\sigma_z$$
$$[\hat\sigma_y,\hat\sigma_z] = 2i\hat\sigma_x$$
$$[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x] = 2i\hat\sigma_y$$

$x \to y \to z$ цикличне пермутације

$$= \hat\sigma_x + i\frac{\phi}{2}[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x] + \frac{1}{2!}\left(i\frac{\phi}{2}\right)^2[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x]] +$$
$$\frac{1}{3!}\left(i\frac{\phi}{2}\right)^3[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x]]] + \frac{1}{4!}\left(i\frac{\phi}{2}\right)^4[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x]]]] +$$
$$+ \frac{1}{5!}\left(i\frac{\phi}{2}\right)^5[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x]]]]] + \dots =$$

$$[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x] = 2i\hat\sigma_y$$

$$[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x]] = [\hat\sigma_z, 2i\hat\sigma_y] = 2i(-2i)\hat\sigma_x = 4\hat\sigma_x$$

$$[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x]]] = 4[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x] = 8i\hat\sigma_y$$

$$[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x]]]] = [\hat\sigma_z, 8i\hat\sigma_y] = 8i[\hat\sigma_z,\hat\sigma_y] = 8i(-2i)\hat\sigma_x$$
$$= 16\hat\sigma_x$$

$$[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x]]]]] = [\hat\sigma_z, 16\hat\sigma_x] = 16[\hat\sigma_z,\hat\sigma_x] = 32i\hat\sigma_y$$

$$= \hat{\sigma}_x + i\frac{\phi}{2}(2i\hat{\sigma}_y) + \frac{1}{2!}\left(i\frac{\phi}{2}\right)^2 4\hat{\sigma}_x + \frac{1}{3!}\left(i\frac{\phi}{2}\right)^3 (8i\hat{\sigma}_y)$$

$$+ \frac{1}{4!}\left(i\frac{\phi}{2}\right)^4 16\hat{\sigma}_x + \frac{1}{5!}\left(i\frac{\phi}{2}\right)^5 32i\hat{\sigma}_y + \dots =$$

$$= \hat{\sigma}_x - \phi\hat{\sigma}_y - \frac{\phi^2}{2!}\hat{\sigma}_x + \frac{1}{3!}\phi^3\hat{\sigma}_y + \frac{1}{4!}\phi^4\hat{\sigma}_x - \frac{1}{5!}\phi^5\hat{\sigma}_y + \dots$$

$$= \hat{\sigma}_x\left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{1}{4!}\phi^4 - \dots\right) - \hat{\sigma}_y\left(\phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 + \dots\right)$$

$$= \hat{\sigma}_x\cos\phi - \hat{\sigma}_y\sin\phi$$

8. Наћи резултат ротације у орбиталном простору за произвољан угао око z-осе за следеће опсервабле

а) вектор положаја ← исти

б) вектор импулса $(\hat p_x, \hat p_y, \hat p_z)$

в) квадрат вектора положаја $(\hat x^2, \hat y^2, \hat z^2)$

г) квадрат вектора импулса ← исти

б) $\hat U^+ \hat p_x \hat U = ?$, $\hat U = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi \hat L_z}$

$$\hat U^+ \hat p_x \hat U = e^{\frac{i}{\hbar}\varphi \hat L_z}\, \hat p_x\, e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi \hat L_z} =$$

$$= \hat p_x + \frac{i}{\hbar}\varphi[\hat L_z, \hat p_x] + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\varphi}{\hbar}\right)^2 [\hat L_z,[\hat L_z,\hat p_x]] + \frac{1}{3!}\left(\frac{i\varphi}{\hbar}\right)^3 [\hat L_z,[\hat L_z,[\hat L_z,\hat p_x]]] + \dots$$

$$[\hat L_z, \hat p_x] = [\hat x \hat p_y - \hat y \hat p_x, \hat p_x] = [\hat x, \hat p_x]\hat p_y = i\hbar \hat p_y$$

$$[\hat L_z,[\hat L_z,\hat p_x]] = [\hat x \hat p_y - \hat y \hat p_x, i\hbar \hat p_y] = i\hbar[\hat x \hat p_y, \hat p_y] - i\hbar[\hat y \hat p_x, \hat p_y]$$

$$= -i\hbar \hat p_x [\hat y, \hat p_y] = \hbar^2 \hat p_x$$

$$[\hat L_z,[\hat L_z,[\hat L_z,\hat p_x]]] = [\hat x \hat p_y - \hat y \hat p_x, \hbar^2 \hat p_x] = \hbar^2 \hat p_y [\hat x, \hat p_x] = i\hbar^3 \hat p_y$$

$$[\hat L_z,[\hat L_z,[\hat L_z,[\hat L_z,\hat p_x]]]] = i\hbar^3 [\hat x \hat p_y - \hat y \hat p_x, \hat p_y] = \hbar^4 \hat p_x$$

$$[\hat L_z,[\hat L_z,[\hat L_z,[\hat L_z,[\cancel{\hat L_z}, \hat p_x]]]]] = i\hbar^5 \hat p_y$$

$$\hat{U}^{+}\hat{p}_x\hat{U} = \hat{p}_x + \frac{i}{\hbar}\varphi\, i\hbar\,\hat{p}_y + \left(\frac{i\varphi}{\hbar}\right)^2 \frac{\hbar^2}{2!}\hat{p}_x + \left(\frac{i\varphi}{\hbar}\right)^3 \frac{i\hbar^3}{3!}\hat{p}_y + \left(\frac{i\varphi}{\hbar}\right)^4 \frac{\hbar^4}{4!}\hat{p}_x + \left(\frac{i\varphi}{\hbar}\right)^5 \frac{i\hbar^5}{5!}\hat{p}_y$$

$$= \hat{p}_x - \varphi\hat{p}_y - \frac{\varphi^2}{2!}\hat{p}_x + \frac{\varphi^3}{3!}\hat{p}_y + \frac{\varphi^4}{4!}\hat{p}_x - \frac{\varphi^5}{5!}\hat{p}_y + \cdots$$

$$= \hat{p}_x\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \cdots\right) - \hat{p}_y\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= \hat{p}_x\cos\varphi - \hat{p}_y\sin\varphi$$

б) $\hat{U}^{+}\hat{x}^2\hat{U} = \left(\hat{U}^{+}\hat{x}\hat{U}\right)^2$

Теорем: $f(\hat{U}^{+}\hat{A}\hat{U}) = \hat{U}^{+}f(\hat{A})\hat{U}$.

Доказ:

Нека је $\hat{A} = \sum_n a_n \hat{P}_n$. Онда $f\left(\hat{U}^{+}\sum_n a_n \hat{P}_n \hat{U}\right) =$

$$= f\left(\sum_n a_n \hat{U}^{+}\hat{P}_n\hat{U}\right) = f\left(\sum_n a_n \hat{P}_n'\right) = \sum_n f(a_n)\hat{P}_n' =$$

$$= \sum_n f(a_n)\hat{U}^{+}\hat{P}_n\hat{U} = \hat{U}^{+}\sum_n f(a_n)\hat{P}_n\hat{U} = \hat{U}^{+}f(\hat{A})\hat{U} \ \blacksquare$$

$\hat{U}^{+}\hat{x}\hat{U} = \ldots$ Вежба

9. Ако је Хамилтонијан инваријантан на неку групу трансформација, да ли то значи и да су сва његова својствена стања нужно инваријантна?

$$\hat{H}|i\rangle = \varepsilon_i |i\rangle \qquad (1)$$

и нека је $[\hat{U}, \hat{H}] = 0 \qquad (2)$

$(\hat{H}) / \hat{U}$ са лева $\Rightarrow$

$$\hat{U}\hat{H}|i\rangle = \varepsilon_i |i\rangle \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\hat{H}(\hat{U}|i\rangle) = \varepsilon_i (\hat{U}|i\rangle)$$

Стање $\hat{U}|i\rangle$, у општем случају, не мора бити једнако $|i\rangle$: $\hat{U}|i\rangle \neq |i\rangle$

У случајевима када је $\hat{U}|i\rangle \neq i$, у питању је дегенерисана својствена вредност.

Или другачије речено: Хамилтонијани симетричних система могу имати дегенерисан спектар.

(Дегенерација се уклања пертурбацијом, која нарушава симетрију система)

10. Наћи резултат деловања транслације на хамилтонијан водониковог атома у орбиталном простору стања.

———— ∘ ————

$$\hat{U}^{+}\hat{H}\hat{U} = ?$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}_e^{\,2}}{2m_e} + \frac{\hat{\vec{p}}_p^{\,2}}{2m_p} + V(|\hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p|) \qquad (*)$$

Нека је $\hat{\vec{P}} = \hat{\vec{p}}_e + \hat{\vec{p}}_p \equiv \hat{\vec{p}}_e \otimes \hat{I}_p + \hat{I}_e \otimes \hat{\vec{p}}_p$ и

$$\hat{U}_{\vec{a}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{P}}}$$

Важи:

$$\hat{U}_{\vec{a}}^{+}\left(\frac{\hat{\vec{p}}_e^{\,2}}{2m_e} + \frac{\hat{\vec{p}}_p^{\,2}}{2m_p}\right)\hat{U}_{\vec{a}} = \frac{\hat{\vec{p}}_e^{\,2}}{2m_e} + \frac{\hat{\vec{p}}_p^{\,2}}{2m_p}$$

Користећи теорем $f(\hat{U}^{+}\hat{A}\hat{U}) = \hat{U}^{+}f(\hat{A})\hat{U}$, Кулонова интеракција се може рачунати на једноставнији начин

$$\hat{U}_{\vec{a}}^{+} V(|\hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p|)\hat{U}_{\vec{a}} = V(\hat{U}_{\vec{a}}^{+}|\hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p|\hat{U}_{\vec{a}}) =$$

$$= V(|\hat{U}_{\vec{a}}^{+}(\hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p)\hat{U}_{\vec{a}}|) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \hat{U}_{\vec{a}}^{+}\hat{\vec{r}}_e\hat{U}_{\vec{a}} = \hat{\vec{r}}_e - \vec{a} \\ \hat{U}_{\vec{a}}^{+}\hat{\vec{r}}_p\hat{U}_{\vec{a}} = \hat{\vec{r}}_p - \vec{a} \end{array}\right] \qquad (**)$$

Због **

$$\hat{U}^{+}_{\vec{a}}\left(\hat{\vec{r}}_e-\hat{\vec{r}}_p\right)\hat{U}_{\vec{a}}=\hat{\vec{r}}_e-\hat{\vec{r}}_p$$, па ће бити

$$\hat{U}^{+}_{\vec{a}}\, V\left(|\hat{\vec{r}}_e-\hat{\vec{r}}_p|\right)\hat{U}_{\vec{a}}=V\left(|\hat{\vec{r}}_e-\hat{\vec{r}}_p|\right)$$

Закључак: Хамилтонијан водоника је транслационо инваријантан

Наћи резултат деловање ротације на хамилтонијан водониковог атома у орбиталном простору стања,

---

$$\hat H = \hat T_e + \hat T_p + V(|\hat{\vec r}_e - \hat{\vec r}_p|)$$

$$\hat U^{+}_{\vec\varphi}\, \hat H\, \hat U_{\varphi} = ?$$

$$\hat U_{\vec\varphi} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec\varphi\cdot\hat{\vec L}}\ , \qquad \hat{\vec L} = \hat{\vec r}_e \times \hat{\vec p}_e + \hat{\vec r}_p \times \hat{\vec p}_p$$

$$\hat U_{\vec\varphi} = \hat U^{e}_{\vec\varphi} \otimes \hat U^{p}_{\vec\varphi}$$

$$\hat U^{+}_{\varphi}\, \hat T_e\, \hat U_{\varphi} = \hat U^{+e}_{\varphi}\, \hat T_e\, \hat U^{e}_{\varphi} = \frac{1}{2m_e}\hat U^{+e}_{\vec\varphi}\, \hat{\vec p}_e^{\,2}\, \hat U^{e}_{\vec\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2m_e}\left(\hat U^{+e}_{\vec\varphi}\, \hat{\vec p}_e\, \hat U^{e}_{\vec\varphi}\right)^2 =$$

$$\hat U^{+e}_{\varphi}\, \hat{\vec p}_e\, \hat U^{e}_{\varphi} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec\varphi\hat{\vec L}_e}\, \hat{\vec p}_e\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec\varphi\hat{\vec L}_e} =$$

$$= \hat{\vec p}_e + \frac{i}{\hbar}\vec\varphi\,[\hat{\vec L}_e, \hat{\vec p}_e] + \left(\frac{i}{\hbar}\varphi\right)^2 \frac{1}{2!}[\hat{\vec L}_e, [\hat{\vec L}_e, \hat{\vec p}_e]] + \dots$$

$$[\hat{\vec L}_e, \hat{\vec p}_e] = [\hat{\vec r}_e \times \hat{\vec p}_e, \hat{\vec p}_e] = (\hat{\vec r}_e \times \hat{\vec p}_e)\hat{\vec p}_e - \hat{\vec p}_e(\hat{\vec r}_e \times \hat{\vec p}_e)$$

$$\boxed{\vec A\cdot(\vec B\times\vec C) = \vec C\cdot(\vec A\times\vec B) = \vec B(\vec C\times\vec A)}$$

$$= (\vec{p}_e \times \vec{r}_e)\,\vec{p}_e - \vec{p}_e\,(\vec{p}_e \times \vec{r}_e)$$

$$= (\hat{\vec{p}}_e \times \hat{\vec{p}}_e)\,\hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_e\,(\hat{\vec{p}}_e \times \hat{\vec{p}}_e) = 0$$

па је зато

$$\hat{U}^{+e}_{\vec{\varphi}}\, \hat{\vec{p}}_e\, \hat{U}^{e}_{\vec{\varphi}} = \hat{\vec{p}}_e$$

$$= \frac{1}{2m_e}\hat{\vec{p}}_e^{\,2} = \hat{T}_e$$

Слично се показује да важи (важила)

$$\hat{U}^{+}_{\vec{\varphi}}\, \hat{T}_p\, \hat{U}_{\vec{\varphi}} = \hat{T}_p$$

Кулонова интеракција $V(|\vec{r}_e - \vec{r}_p|)$

$$\hat{U}^{+}_{\vec{\varphi}}\, V(|\hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p|)\, \hat{U}_{\vec{\varphi}} = V\left(|\hat{U}^{+}_{\vec{\varphi}}(\hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p)\hat{U}_{\vec{\varphi}}|\right)$$

Слично, као у претходном задатку, показује се да важи (користећи особине мешовитог производа)

$$\hat{U}^{+}_{\vec{\varphi}}\,(\hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p)\,\hat{U}_{\vec{\varphi}} = \hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p$$

па је

$$\hat{U}^{+}_{\vec{\varphi}}\, V(|\hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p|)\, \hat{U}_{\vec{\varphi}} = V(|\hat{\vec{r}}_e - \hat{\vec{r}}_p|)$$

Закључак: хамилтонијан водониковог атома је ротационо инваријантан, па отуда ПСКО
$\hat{H}, \hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z$

11. За водоников случан јон задат је Хамилтонијан

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}$$

ротационо инваријантни

где $\hat{H}_0$ представља у стандардни Хамилтонијан водониковог атома без спина. Доказати инваријантност овог Хамилтонијана у односу на произвољне опште ротације.

Генератор за опште ротације $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$

Будући да важи $[\hat{H}_0, \hat{\vec{L}}] = 0 \Rightarrow$

$$[\hat{H}, \hat{\vec{J}}] = [\hat{H}_0 + \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}, \hat{\vec{S}} + \hat{\vec{L}}]$$

$$= \cancel{[\hat{H}_0, \hat{\vec{S}}]}^{0} + \cancel{[\hat{H}_0, \hat{\vec{L}}]}^{0} + [\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}, \hat{\vec{S}}] + [\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}, \hat{\vec{L}}]$$

$$= [\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}, \hat{\vec{S}}] + [\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}, \hat{\vec{L}}]$$

Али, $\boxed{\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}} = \sum_i \hat{S}_i \otimes \hat{L}_i}$, $\hat{\vec{S}} \in \mathcal{H}^{(S)}$, $\hat{\vec{L}} \in \mathcal{H}^{(0)}$

$$= \left[\sum_i \hat{S}_i \otimes \hat{L}_i, \sum_k \hat{S}_k \vec{e}_k\right] + \left[\sum_i \hat{S}_i \otimes \hat{L}_i, \sum_k \hat{L}_k \vec{e}_k\right]$$

$$= \sum_{i,k} \vec{e}_k [\hat{S}_i \otimes \hat{L}_i, \hat{S}_k] + \sum_{i,k} \vec{e}_k [\hat{S}_i \otimes \hat{L}_i, \hat{L}_k]$$

$$= \sum_{i,k} \vec{e}_k \left\{ [\hat{S}_i \otimes \hat{L}_i, \hat{S}_k] + [\hat{S}_i \otimes \hat{L}_i, \hat{L}_k] \right\}$$

$$[\hat{S}_i \otimes \hat{L}_i, \hat{S}_K] = [\hat{S}_i, \hat{S}_K] \otimes \hat{L}_i = i\hbar \varepsilon_{iKj} \hat{S}_j \otimes \hat{L}_i$$

$$[\hat{S}_i \otimes \hat{L}_i, \hat{L}_K] = \hat{S}_i \otimes [\hat{L}_i, \hat{L}_K] = i\hbar \varepsilon_{iKj} \hat{S}_i \otimes \hat{L}_j$$

$$= i\hbar \varepsilon_{jKi} \hat{S}_j \otimes \hat{L}_i$$

$$\Downarrow$$

$$[\hat{S}_i \otimes \hat{L}_i, \hat{S}_K] + [\hat{S}_i \otimes \hat{L}_i, \hat{L}_K] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\hat{H}, \vec{J}] = 0$$

12. Наћи резултат произвољне ротације V за следеће опсервабле (потенцијале интеракција)

а) $-\mu\,\hat{\vec{L}}_1\cdot\hat{\vec{L}}_2$

б) $-\mu\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$ исти

за пар електрона

она за V $-\mu\,\hat{\vec{L}}_1\cdot\hat{\vec{S}}_1$ једног електрона

први електрон $\hat{\vec{L}}_1$

други електрон $\hat{\vec{L}}_2$

$$\hat{\vec{L}}_z = \hat{\vec{L}}_{1z} + \hat{\vec{L}}_{2z}$$

Ротација $\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi_z \hat{L}_z} = \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2$

$$\hat{U}^+ \hat{\vec{L}}_1\cdot\hat{\vec{L}}_2\,\hat{U} = ?$$

$$\hat{\vec{L}}_1\cdot\hat{\vec{L}}_2 = \hat{L}_{1x}\hat{L}_{2x} + \hat{L}_{1y}\hat{L}_{2y} + \hat{L}_{1z}\hat{L}_{2z}$$

$$\hat{U}^+ \hat{\vec{L}}_1\cdot\hat{\vec{L}}_2\,\hat{U} = \hat{U}_1^+\otimes\hat{U}_2^+ \left(\hat{L}_{1x}\otimes\hat{L}_{2x} + \hat{L}_{1y}\otimes\hat{L}_{2y} + \hat{L}_{1z}\otimes\hat{L}_{2z}\right)$$

$$\hat{U}_1\otimes\hat{U}_2 = \hat{U}_1^+\otimes\hat{U}_2^+\,\hat{L}_{1x}\otimes\hat{L}_{2x}\,\hat{U}_1\otimes\hat{U}_2 +$$

$$\hat{U}_1^+\otimes\hat{U}_2^+\,\hat{L}_{1y}\otimes\hat{L}_{2y}\,\hat{U}_1\otimes\hat{U}_2 +$$

$$\hat{U}_1^+\otimes\hat{U}_2^+\,\hat{L}_{1z}\otimes\hat{L}_{2z}\,\hat{U}_1\otimes\hat{U}_2$$

Подсетник $[\hat{L}_i,\hat{L}_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k$

12.

Нађи резултат деловања транслације (ротације) на хамилтонијан линеарног хармонијског осцилатора.

ЛХО, $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$

транслација

$\hat{U}_{\vec{a}}^{+} \hat{H} \hat{U}_{\vec{a}} = ?$

$\hat{U}_a = e^{-\frac{i}{\hbar} a \hat{p}_x}$, и опет користимо теорем

$f(\hat{U}^{+} \hat{A} \hat{U}) = \hat{U}^{+} f(\hat{A}) \hat{U}$

ротација

$\hat{U}_{\vec{\varphi}}^{+} \hat{H} \hat{U}_{\vec{\varphi}} = ?$

$\hat{U}_\varphi = e^{-\frac{i}{\hbar} \varphi \hat{L}_x}$; $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$