Системи идентичних честица и друга квантизација

Постулат о идентичним честицама

а) Простор стања система од N идентичних бозона (V_s) је простор свих симетричних вектора у $\mathcal{H}^{(u)}_{1\ldots N}$

б) Простор стања система од N идентичних фермиона (V_a) је простор свих антисиметричних вектора у $\mathcal{H}^{(u)}_{1\ldots N}$

Таласна ф-ја система који се састоји од идентичних честица има одређену симетрију у односу на пермутацију честица, тако да

$$\Psi(\ldots,\xi_a,\ldots\xi_b,\ldots) = \pm\Psi(\ldots,\xi_b,\ldots\xi_a,\ldots)$$

при чему $\xi_n \equiv (\hat{\vec{r}}_n, \hat{s}_n)$ | "$+$" – бозони, "$-$" – фермиони

— Формализам друге квантизације (Фоков простор)

многочестични системи где број честица није сталан

- Оператори креације и анихилације

$\hat{a}_i^+$, $\hat{a}_i$, i-та честица

- Бозони

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_k] = [\hat{a}_i^+, \hat{a}_k^+] = 0, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_k^+] = \delta_{ik}$$

- Фермиони

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_k\} = \{\hat{a}_i^+, \hat{a}_k^+\} = 0, \quad \{\hat{a}_i, \hat{a}_k^+\} = \delta_{ik}$$

- Нека је

$|\ldots, n_i, \ldots\rangle$ елемент Фоковог простора

$$\hat{a}_i|\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\,|\ldots, n_i - 1, \ldots\rangle$$

$$\hat{a}_i|\ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i+1}\,|\ldots, n_i + 1, \ldots\rangle$$

за фермионе $n_i = 0$ или 1

за бозоне $n_i = 0, 1, 2, \ldots$

- Важно: У нерелативистичкој квантној механици (масених честица) број честица има оштру вредност $\Delta^2 N = 0$ за свако стање из Фоковог простора. У теорији поља не мора бити тако!

- $|0\,0 \ldots 0\rangle \longrightarrow$ вектор који описује вакуум

1. Размотрити систем од две идентичне честице, 1 и 2. Ако је једна од њих у стању $|\psi\rangle$, а друга у стању $|\chi\rangle$, како изгледа најопштије стање овог система? Написати симетрично и антисиметрично стање.

Два стања $|\chi\rangle$ и $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2 \quad , \quad |\chi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2$$

Најопштије:

$$|\psi\rangle_{12} = c_1 |\psi\rangle_1 |\chi\rangle_2 + c_2 |\chi\rangle_1 |\psi\rangle_2 .$$

Услов нормирања:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 .$$

Могућности су једнако вероватне $|c_1|^2 = |c_2|^2$.

Следи $2|c_1|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |c_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |c_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Даље: $c_1 = |c_1| e^{i\delta} \quad c_2 = |c_2| e^{i\beta}$

1) $\delta = \beta = 0$ 2) $\delta = 0 \quad \beta = \pi$

$c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

1) Симетрично стање

$$|\psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi\rangle_1 |\chi\rangle_2 + |\chi\rangle_1 |\psi\rangle_2\right)$$

$$\hat{P}_{12}|\psi\rangle_{12} = |\psi\rangle_{12}$$

2) Антисиметрично стање

$$|\psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi\rangle_1 |\chi\rangle_2 - |\chi\rangle_1 |\psi\rangle_2\right)$$

$$\hat{P}_{12}|\psi_{12}\rangle = -|\psi\rangle_{12}$$

У вези са $\beta = 0$, $\beta = \pi$

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{i\alpha}\psi(\xi_2, \xi_1)$$

Понављајући замену честица $\Rightarrow$

$$e^{2i\alpha} = 1 \Rightarrow e^{i\alpha} = \pm 1 \Rightarrow \begin{matrix}\alpha = 0 \\ \alpha = \pi\end{matrix}$$

2. Дат је систем од 4 честице. Исписати све пермутације по међусобно ортогоналним стањима $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ и $|\psi_4\rangle$ и разврстати их по парним и непарним пермутацијама. На основу тога записати симетрично и антисиметрично стање.

Пермутације бројева 1, 2, 3, 4 $(4! = 24)$

+ 1234	− 2134	− 3142	− 4123
− 1243	+ 2143	+ 3124	+ 4132
+ 1423	− 2413	− 3214	− 4312
− 1432	+ 2431	+ 3241	+ 4321
+ 1342	− 2341	− 3421	− 4231
− 1324	+ 2314	+ 3412	+ 4213

У укупном простору стања

$$|\psi_{1234}\rangle = c_1 |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 |\psi\rangle_3 |\psi\rangle_4 + \ldots + c_{24} |\psi\rangle_4 |\psi\rangle_2 |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_3$$

Симетрично стање $\quad c_1 = \ldots = c_{24} = \frac{1}{\sqrt{4!}}$

Антисиметрично стање $\quad c_1 = \ldots = c_{12} = \frac{1}{\sqrt{4!}}$

$$c_{13} = \ldots = c_{24} = -\frac{1}{\sqrt{4!}}$$

3. Дата је Slater-ова детерминанта, којом је описано стање три идентична фермиона:

$$|\Psi\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} |\phi_1^{(1)}\rangle & |\phi_2^{(1)}\rangle & |\phi_3^{(1)}\rangle \\ |\phi_1^{(2)}\rangle & |\phi_2^{(2)}\rangle & |\phi_3^{(2)}\rangle \\ |\phi_1^{(3)}\rangle & |\phi_2^{(3)}\rangle & |\phi_3^{(3)}\rangle \end{vmatrix}$$

Показати да је ово стање нормирано и антисиметрично. Шта се дешава ако је $|\phi_1^{(j)}\rangle = |\phi_2^{(j)}\rangle$, $\forall j$ (j означава честицу)? Исписати све у координатној репрезентацији. Шта ако су у питању 3 бозона? Која су могућа стања?

Нормираност: $\;{}_{123}\langle\Psi|\Psi\rangle_{123} = 1$

$|\phi_i^{(j)}\rangle$ — j → честица, i → стање

проверити

Детерминанта је нула ако $|\phi_1^{(i)}\rangle = |\phi_2^{(i)}\rangle \Rightarrow$ Паулијев принцип искључења: два или више фермиона се не могу наћи у истом стању.

У координатној репрезентацији

$\langle\vec{r}_1|\langle\vec{r}_2|\langle\vec{r}_3|\Psi\rangle_{123}$

веза $\langle \vec{r}_j | \phi_i^{(j)} \rangle \equiv \phi_i(\vec{r}_j)$

$$\Psi_{123}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)=\frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{vmatrix} \phi_1(\vec{r}_1) & \phi_2(\vec{r}_1) & \phi_3(\vec{r}_1) \\ \phi_1(\vec{r}_2) & \phi_2(\vec{r}_2) & \phi_3(\vec{r}_2) \\ \phi_1(\vec{r}_3) & \phi_2(\vec{r}_3) & \phi_3(\vec{r}_3) \end{vmatrix}$$

Бозони (искористити детерминанту, али све тал. ф-је са позитивним предзнаком)

$$\Psi_{123}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)=\frac{1}{\sqrt{3!}}\Big(\phi_1(\vec{r}_1)\phi_2(\vec{r}_2)\phi_3(\vec{r}_3)+$$
$$\phi_1(\vec{r}_1)\phi_3(\vec{r}_2)\phi_2(\vec{r}_3)+\phi_2(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)\phi_3(\vec{r}_3)+$$
$$\phi_2(\vec{r}_1)\phi_3(\vec{r}_2)\phi_1(\vec{r}_3)+\phi_3(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)\phi_2(\vec{r}_3)+$$
$$\phi_3(\vec{r}_1)\phi_2(\vec{r}_2)\phi_1(\vec{r}_3)\Big)$$

Ово је стање ако су једночестична стања сва различита

Нека је $1=2\neq 3$ (видети друге ~~комбинације~~ варијације)

$$\Psi_{123}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)=\frac{1}{\sqrt{3!}}\Big(\phi_1(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)\phi_3(\vec{r}_3)+$$
$$\phi_1(\vec{r}_1)\phi_3(\vec{r}_2)\phi_1(\vec{r}_3)+\phi_1(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)\phi_3(\vec{r}_3)+$$

$$\phi_1(\vec{r}_1)\phi_3(\vec{r}_2)\phi_1(\vec{r}_3) + \phi_3(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)\phi_1(\vec{r}_3)$$

$$+\phi_3(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)\phi_1(\vec{r}_3)\Big) =$$

$$\sqrt{\frac{2!}{3!}}\Big(\phi_1(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)\phi_3(\vec{r}_3) + \phi_1(\vec{r}_1)\phi_3(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_1) +$$

$$\phi_3(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)\phi_1(\vec{r}_3)\Big)$$

Нека x $1=2=3$

$$\Psi_{123}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \phi_1(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)\phi_1(\vec{r}_3)$$

4. Хелијумов атом је у основном стању

$$|\Psi\rangle_{0\,1+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{1z}|-\rangle_{2z} - |-\rangle_{1z}|+\rangle_{2z}\right).$$

Какво мора бити орбитално стање два електрона с обзиром на Паулијев принцип? Израчунати подсистемске статистичке операторе (мешавине 2 врсте) за сваки од подсистема - орбитални члан за оба електрона, спинска стања за сваки од електрона.

Опсервабле орбиталних и спинских степени слободе по дефиницији комутирају

$$\text{ПСКО}: \hat{H},\ \underbrace{\hat{\vec{S}}^2,\ \hat{S}_z}_{\text{тиче се два електрона}}\ ;\ \hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\hat{\vec{p}}_2^{\,2}}{2m} - \frac{Ze^2}{\hat{r}_1} - \frac{Ze^2}{\hat{r}_2} + \frac{e^2}{|\hat{\vec{r}}_1 - \hat{\vec{r}}_2|}$$

Својствене ф-је за ПСКО су онда

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle_{орб} \otimes |\chi\rangle_{спин}$$

За систем електрона укупна таласна ф-ја мора бити антисиметрична. У задатку је задат спински део који је антисиметричан, па орбитални део мора бити симетричан.

Занемаримо интеракцију међу електронима, па ће сплетено стање бити само услед идентичности честица

Slater-ова детерминанта

$$|\Psi_{12}\rangle_{O+S} = \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} |100\rangle_1 \, |+\rangle_1 & |100\rangle_2 \, |+\rangle_2 \\ |100\rangle_1 \, |-\rangle_1 & |100\rangle_2 \, |-\rangle_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2!}} |100\rangle_1 \, |100\rangle_2 \left(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2 \right)$$

$$= |\phi\rangle_{орб} \otimes |\chi\rangle_{спин}$$

$$\hat{\rho}_S = |\chi\rangle_{спин}\langle\chi| \quad , \quad \hat{\rho}_O = |\phi\rangle_{орб}\langle\phi|$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\rho}_{S_1} &= tr_{S_2} |\chi\rangle_{спин}\langle\chi| \\ \hat{\rho}_{S_2} &= tr_{S_2} |\chi\rangle_{спин}\langle\chi| \end{aligned}\right\} \text{за вежбу}$$

5. Стање електронског пара у хелијуму је облика

$$R^{(12)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\ |S\, m_S\rangle$$

где се S тиче квадрата и z-пројекције опсервабле $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2$; $\hat{\vec{S}}_1$ и $\hat{\vec{S}}_2$ су спин прве и друге честице. Ако је стање $|S m_S\rangle = |11\rangle$, какво је стање $R^{(12)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ – симетрично или антисиметрично. А шта ако је $|S m_S\rangle = |00\rangle$?

---

2 електрона : укупно стање мора бити антисиметрично

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{s1} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \\ s_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{s2} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{S = 0, 1}_{\text{теорија ангуларног момента}}$$

$|00\rangle$ – антисиметрично стање два електрона $\Rightarrow$ $R^{(12)}$ мора да буде симетрична

$$\left.\begin{array}{l} |10\rangle \\ |1\,{-1}\rangle \\ |11\rangle \end{array}\right\}$$ симетрична стања два електрона $\Rightarrow$ $R^{(12)}$ мора да буде антисиметрично

за писмени део испита

Задате су $R^{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[R_{nl}(\vec{r}_1) R_{n'l'}(\vec{r}_2) \pm R_{n'l'}(\vec{r}_1) R_{nl}(\vec{r}_2)\right]$ таласне ф-је, које се тичу орбиталних степени слободе, два електрона. Какво је и које је стање $|S m_S\rangle$, спинских степени слободе, за $\{+, -\}$ знакове респективно?

Коментар за парахелијум и ортохелијум

Основно стање два електрона (антисиметрично)

$$|\psi\rangle = \underbrace{\left(|100\rangle_1 \otimes |100\rangle_2\right)_0}_{\text{симетрично}} \otimes \underbrace{|00\rangle_S}_{\text{антисиметрично}}$$

Побуђено стање $\begin{pmatrix} n_1 = 1, & n_2 = 2 \\ n_1 = 2, & n_2 = 1 \end{pmatrix}$ ≡ Један електрон у основном, други у побуђеном стању

$$|\psi\rangle_{\text{пара}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\left(|100\rangle_1 \otimes |2lm\rangle_2 + |2lm\rangle_1 \otimes |100\rangle_2\right)_0}_{\substack{\text{симетрична таласна} \\ \text{ф-ја}}} \otimes |00\rangle_S$$

$|00\rangle_S$ → антипаралелни спинови $S = 0$

$$|\psi\rangle_{\text{орто}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\left(|100\rangle_1 \otimes |2lm\rangle_2 - |2lm\rangle_1 \otimes |100\rangle_2\right)_0}_{\substack{\text{антисиметрична} \\ \text{таласна ф-ја}}} \otimes |1\, m_s\rangle_S$$

$|1\, m_s\rangle_S$ → паралелни спинови $S = 1$

$|nlm\rangle$ — ознака за таласну ф-ју водониковог атома

Орто и парахелијум се тичу побуђених стања хелијумовог атома, док је основно стање хелијума онда парахелијум.

6. Какав је систем квазичестица енергијски еквивалентан једном ЛХО-у?

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$$

Уводе се оператори

$$\left.\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right] \\ \hat{a}^{+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right] \end{aligned}\right\}$$ Нису ермитски оператори

$$[\hat{a}, \hat{a}^{+}] = 1$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \longrightarrow \varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

(сваке енергије)

Једном осцилатору ν одговара n бозона са енергијом $\hbar\omega$ (енергијска еквиваленција)

Задатак: Подсетити се како је изгледао израз за средњу вредност попуњености једночестичних нивоа код фотонског гаса

$$\langle n_{\vec{p}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \quad \varepsilon_{\vec{p}} = \hbar\omega \longrightarrow$$

што одговара Бозе-Ајнштајновој статистици

7. Задат је Хамилтонијан за линеарни осцилатор

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2}_{\hat{H}_0} + \lambda \hat{x}^4$$

Како гласе својствене вредности овог Хамилтонијана у првој поправци за енергију? Радити у формализму друге квантизације.

$$E^{(1)} = \langle n | \hat{V} | n \rangle \longrightarrow$$ Поправка за недегенерисани ниво

↓ својствена стања непертурбованог Хамилтонијана

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V} \quad ; \quad \hat{H}_0 |n\rangle = \mathcal{E}_n |n\rangle$$

$$\mathcal{E}_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left(\hat{a} + \hat{a}^{+}\right)$$

$$\hat{x}^4 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \left(\hat{a} + \hat{a}^{+}\right)^4$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \left(\hat{a} + \hat{a}^{+}\right)\left(\hat{a} + \hat{a}^{+}\right)\left(\hat{a} + \hat{a}^{+}\right)\left(\hat{a} + \hat{a}^{+}\right)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \left(\hat{a}^2 + aa^{+} + \hat{a}^{+}\hat{a} + \hat{a}^{+2}\right)\left(\hat{a}^2 + aa^{+} + \hat{a}^{+}\hat{a} + \hat{a}^{+2}\right.$$

$$=\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2\left(\hat a^4+\hat a^3\hat a^+ +\hat a^2\hat a^+\hat a+\hat a^2\hat a^{+2}+\hat a\hat a^+\hat a\hat a^{+2}+\hat a\hat a^+\hat a\hat a^+\right.$$

$$+\hat a\hat a^{+2}\hat a+\hat a\hat a^{+3}+\hat a^+\hat a^3+\hat a^+\hat a^2\hat a^+ +\hat a^+\hat a\hat a^+\hat a+\hat a^+\hat a\hat a^{+2}+$$

$$\left.\hat a^{+2}\hat a^2+\hat a^{+2}\hat a\hat a^+ +\hat a^{+3}\hat a+\hat a^{+4}\right)$$

$$\cancel{=\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^3\Big(}$$

Узимајући у обзир релације

$$\hat a|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$\hat a^+|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

Јасно је да следи (преживљавају само чланови где је број $\hat a$ и $\hat a^+$ исти)

$$\langle n|(\hat a+\hat a^+)^4|n\rangle=\langle n|\,\hat a^2\hat a^{+2}+\hat a\hat a^+\hat a\hat a^+ +\hat a\hat a^{+2}\hat a+$$

$$\hat a^+\hat a^2\hat a^+ +\hat a^+\hat a\hat a^+\hat a+\hat a^{+2}\hat a^2\,|n\rangle=$$

$$=\langle n|\hat a^2\hat a^{+2}|n\rangle+\langle n|\hat a\hat a^+\hat a\hat a^+|n\rangle+\langle n|\hat a\hat a^{+2}\hat a|n\rangle$$

$$+\langle n|\hat a^+\hat a^2\hat a^+|n\rangle+\langle n|\hat a^+\hat a\hat a^+\hat a|n\rangle+\langle n|\hat a^{+2}\hat a^2|n\rangle=$$

$$= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,\langle n|\hat{a}^2|n+2\rangle + \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\,\langle n|\hat{a}\hat{a}^+|n\rangle +$$

$$+ \sqrt{n}\,\langle n|\hat{a}\hat{a}^{+2}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,\langle n|\hat{a}^+\hat{a}^2|n+1\rangle +$$

$$+ n\langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle + \sqrt{n}\sqrt{n-1}\,\langle n|\hat{a}^{+2}|n-2\rangle =$$

$$= (n+2)(n+1)\,\langle n|n\rangle + (n+1)(n+1)\,\langle n|n\rangle +$$

$$+ n\sqrt{n+1}\,\langle n|\hat{a}|n+1\rangle + (n+1)\sqrt{n}\,\langle n|\hat{a}^+|n-1\rangle +$$

$$+ n^2\langle n|n\rangle + n(n-1)\,\langle n|n\rangle$$

$$= (n+2)(n+1) + (n+1)^2 + n(n+1) + n(n+1) + n^2 + n(n-1)$$

$$= (n+1)(2n+3) + 2n(n+1) + n(n+n-1)$$

$$= 2n^2 + 3n + 2n + 3 + 2n^2 + 2n + 2n^2 - n$$

$$= 6n^2 + 6n + 3$$

Поправка је

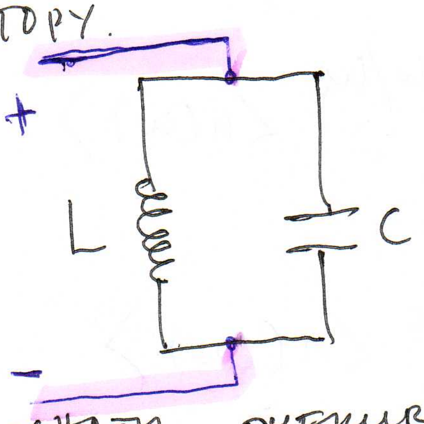
$$E^{(1)} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 (6n^2+6n+3)$$

, а својствене вредности за Хамилтонијан, у првој поправци су

$$\varepsilon_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 (6n^2+6n+3)$$

3) LC осцилатор (на слици) се састоји од кондензатора капацитета C који је паралелно везан са калемом индуктивитета L и налази се у термалној равнотежи на температури T. Мери се наелектрисање q у кондензатору.

За писмени део задатка дати хамилтонијан система у поставци задатка



а) Израчунати очекивану вредност $\hat{q}$

б) Израчунати дисперзију $\Delta(\hat{q})$.

LC коло је хармонијски осцилатор

$$\left.\begin{aligned}\hat{a} &= \sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} + \frac{i\hat{\phi}}{L\omega}\right)\\ \hat{a}^{+} &= \sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} - \frac{i\hat{\phi}}{L\omega}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^{+}\right)$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(a^{+}a + \frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}$$

$$Z = \mathrm{tr}\, e^{-\beta\hat{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{\beta\hbar\omega}{2}}$$

$$\langle \hat{q} \rangle = \mathrm{tr}(\hat{q}\hat{\rho}) = \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega}}\,\langle n|(\hat{a}+\hat{a}^{+})e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}|n\rangle = 0$$

$$\langle \hat{q}^2 \rangle = \mathrm{tr}(\hat{q}^2\hat{\rho}) = \frac{\hbar}{2L\omega Z}\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|(\hat{a}+\hat{a}^{+})^2 e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2L\omega Z}\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|(\hat{a}+\hat{a}^{+})(\hat{a}+\hat{a}^{+})\, e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2L\omega Z}\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|(\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^{+}+\hat{a}^{+}\hat{a}+\hat{a}^{+2})\, e^{-\beta\hat{\mathcal{H}}}|n\rangle$$

$$[a, a^{+}] = 1$$

$$= \frac{\hbar}{2L\omega Z}\, 2\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\left(\tfrac{1}{2}+n\right) e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}|n\rangle$$

$$= \frac{1}{L\omega^2 Z}\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right) e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}|n\rangle$$

$$= -\frac{1}{L\omega^2}\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = -\frac{1}{L\omega^2}\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{L\omega^2}\frac{\hbar\omega}{2}\,\mathrm{th}\frac{\beta\hbar\omega}{2} = C\frac{\hbar\omega}{2}\,\mathrm{th}\frac{\beta\hbar\omega}{2}$$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \sim$$ СОПСТВЕНА ФРЕКВЕНЦИЈА КОЛА

Коментар → ово доле треба рећи на самом почетку

Хамилтонијан LC система је дат изразом

$$\hat{H} = \frac{\hat{\phi}^2}{2L} + \frac{1}{2} L\omega^2 \hat{q}^2 \quad , \quad [\hat{q}, \hat{\phi}] = i\hbar$$

$\hat{q}$ - оператор наелектрисања

$\hat{\phi}$ - оператор магнетског флукса

9. Показати да је последица антикомутационих релација за фермионе да на једночестичном енергетском нивоу може бити 0 или 1 фермиона.

$$\{\hat{a}_i^+, \hat{a}_j\} = \delta_{ij} \quad , \quad \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0 = \{\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^+\} \qquad (*)$$

$$\hat{N}|n_i\rangle = n_i|n_i\rangle \quad , \quad i\text{-та честица}$$

Нека је у питању једна честица

$$\{\hat{a}^+, \hat{a}\} = 1 \implies \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ = 1 \; ; \quad \boxed{\begin{matrix} \hat{a}^2 = 0 \\ \hat{a}^{+2} = 0 \end{matrix}}$$

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad , \quad \hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{N}^2|n\rangle = \hat{a}^+\underline{\hat{a}\hat{a}^+}\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^+\underline{(1 - \hat{a}^+\hat{a})}\hat{a}|n\rangle$$

$$= \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle - \underbrace{(\hat{a}^+)^2}_{0}(\hat{a})^2|n\rangle$$

$$= \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

$$n^2|n\rangle = n|n\rangle \implies n(1-n) = 0 \quad \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Паулијев принцип искључења